Commission scolaire des Premières-Seigneuries

Centre de FORMATION GÉNÉRALE DES ADULTES

4 établissements de la Commission scolaire des Premières-Seigneuries

Modélisation algébrique

MAT-2101-3

APPRENTISSAGE

Variables directement ou inversement proportionnelles

Document produit
par Martine Blais et Lise Hénault
Centre Odilon-Gauthier
CS des Premières-Seigneuries

Octobre 2009

Des variables

directement proportionnelles,

inversement proportionnelles

ou ni l'un ni l'autre…?

Dans la première situation d'apprentissage de ton cahier, tu as vu le modèle algébrique qui permet de calculer la distance parcourue à partir de la ***vitesse*** ou du ***temps*** écoulé. Ce modèle peut s'écrire ainsi :

Modèle 1

$$d = vt$$

d représentant la distance, **v** la vitesse et **t** le temps.

Tu sais aussi qu'il est possible de représenter la relation entre ces trois variables à l'aide de deux autres modèles algébriques qui permettent de calculer le temps ou la vitesse à partir des deux autres variables. Ces modèles peuvent s'écrire ainsi :

Modèle 2

$$t = \frac{d}{v}$$

et

Modèle 3

$$v = \frac{d}{t}$$

où **d** représente toujours la distance, **v** la vitesse et **t** le temps.

Situation 1

À l'aide du modèle $d = vt$ complète le tableau suivant pour une vitesse constante de **80 km/h**.

TEMPS	**DISTANCE**
1 h	
2 h	
3 h	
4 h	
$\frac{1}{2}$ h	
$\frac{1}{4}$ h	

Dans le modèle algébrique en haut de la page, encercle les 2 variables identifiées dans le tableau et réponds aux questions.

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu doubles **t** ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu triples **t** ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu quadruples **t** ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu divises **t** par 2 ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu divises **t** par 4 ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Comme tu as pu le constater dans cette situation, les variables ***d*** et ***t*** subissent le même changement. Lorsque la vitesse demeure constante, si on multiplie le temps par un certain nombre, la distance est multipliée par le même nombre. De la même manière, lorsque le temps est divisé par un certain nombre, la distance est divisée par le même nombre.

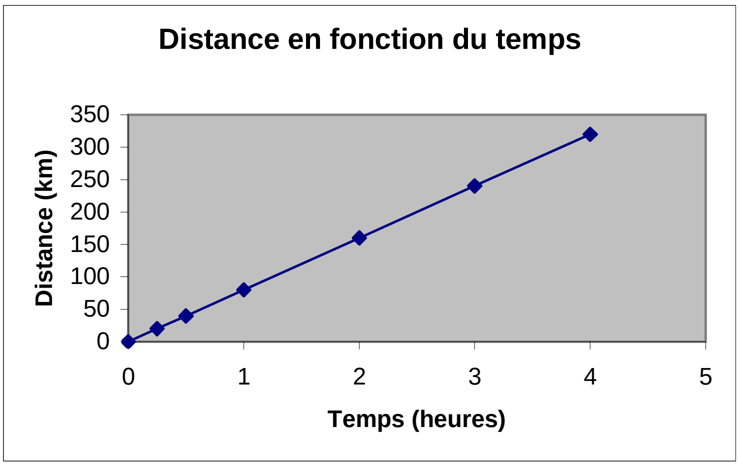
- Selon le tableau, les variables ***d*** et ***t*** subissent les mêmes changements (multiplication ou division). On dit qu'elles sont ***directement proportionnelles.***

- On peut savoir que des variables sont directement proportionnelles à partir de leur position dans un modèle algébrique. Dans un modèle comme celui-ci :

$$d = v\,t$$

des variables comme ***d*** et ***t***, **situées l'une à gauche du signe d'égalité et l'autre à droite** sont directement proportionnelles. En gardant la vitesse constante, une augmentation du temps entraîne une augmentation proportionnelle de la distance.

- On peut représenter les données du tableau que tu as complété sur un graphique comme celui qui est présenté ci-dessous. La droite qui représente la relation entre des variables directement proportionnelles comme ***d*** et *t* **passe par le point (0,0)** situé au croisement des axes.



Situation 2

À l'aide du modèle $v = \frac{d}{t}$ complète le tableau suivant pour un trajet d'une distance de **800 kilomètres**.

TEMPS	**VITESSE**
8 h	
16 h	
32 h	
4 h	*
2 h	*

**évidemment, ce n'est pas en automobile …*

Dans le modèle algébrique en haut de la page, encercle les 2 variables identifiées dans le tableau et réponds aux questions.

Qu'arrive-t-il à **v** lorsque tu doubles **t** ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **v** lorsque tu quadruples **t** ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **v** lorsque tu divises **t** par 2 ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **v** lorsque tu divises **t** par 4 ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Comme tu as pu le constater dans cette situation, les variables ***t*** et ***v*** subissent des changements inverses. Lorsque la distance demeure constante, si on multiplie le temps par un certain nombre, la vitesse est divisée par le même nombre. De la même manière, lorsque le temps est divisé par un certain nombre, la vitesse est multipliée par le même nombre.

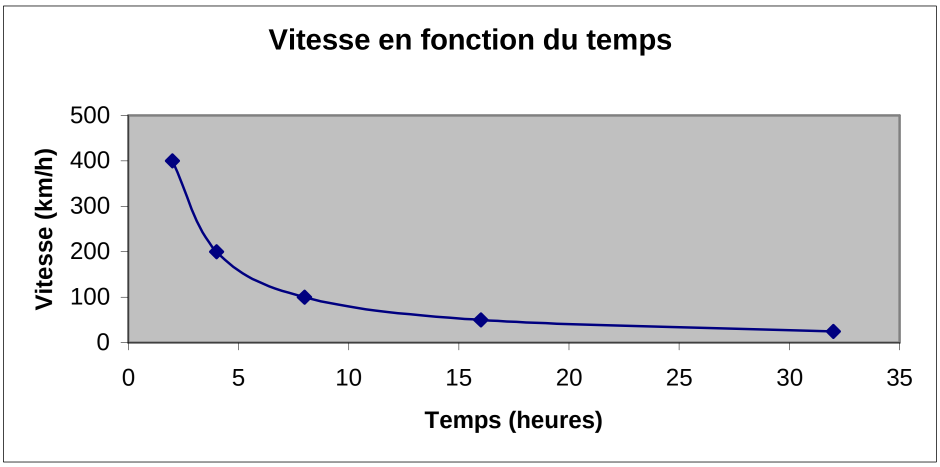
- Selon le tableau, les variables ***t*** et ***v*** subissent des changements inverses (multiplication vs division). On dit qu'elles sont ***inversement proportionnelles.***

- On peut savoir que des variables sont inversement proportionnelles à partir de leur position dans un modèle algébrique. Dans un modèle comme celui-ci :

$$v = \frac{d}{t}$$

des variables comme ***v*** et ***t***, **situées l'une à gauche du signe d'égalité et l'autre à droite et l'une au numérateur et l'autre au dénominateur** sont inversement proportionnelles. En effet, en divisant la distance par un temps plus grand, on obtient une vitesse plus petite.

- On peut représenter les données du tableau que tu as complété sur un graphique comme celui qui est présenté ci-dessous. La relation entre des variables inversement proportionnelles comme ***v*** et *t* **prend la forme d'une courbe qui tend à s'approcher des axes.**



Situation 3

À l'aide du modèle $d = vt$ complète le tableau suivant pour un trajet d'une distance de **800 kilomètres**.

VITESSE	**TEMPS** (heures)
100 km/h	
200 km/h *	
400 km/h *	
50 km/h	
25 km/h	

*évidemment, ce n'est toujours pas en automobile …

Dans le modèle algébrique en haut de la page, encercle les 2 variables identifiées dans le tableau et réponds aux questions.

Qu'arrive-t-il à **t** lorsque tu doubles **V** ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **t** lorsque tu quadruples **V** ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **t** lorsque tu divises **V** par 2 ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **t** lorsque tu divises **V** par 4 ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Dans cette situation, tu as pu constater que les variables ***t*** et ***v*** subissent des changements inverses. Lorsque la distance demeure constante, si on multiplie la vitesse par un certain nombre, le temps est divisé par le même nombre. De la même manière, lorsque la vitesse est divisée par un certain nombre, le temps est multiplié par le même nombre.

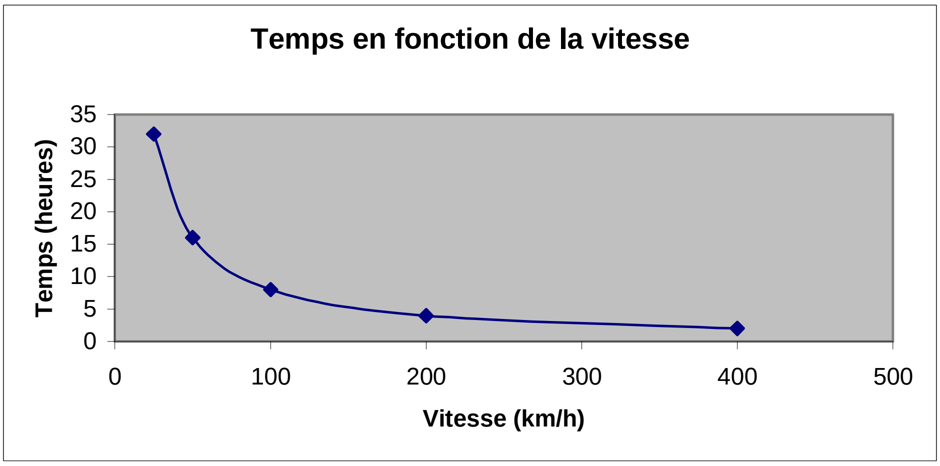
- Selon le tableau, les variables ***t*** et ***v*** subissent des changements inverses (multiplication vs division). On dit qu'elles sont ***inversement proportionnelles.***

- On peut savoir que des variables sont inversement proportionnelles à partir de leur position dans un modèle algébrique. Dans un modèle comme celui-ci :

$$d = v\,t$$

des variables comme ***v*** et ***t***, <u>**situées du même côté du signe d'égalité et reliées par une multiplication**</u> sont inversement proportionnelles. En effet, il est facile d'imaginer que pour garder la distance constante, la vitesse et le temps doivent varier inversement.

- On peut représenter les données du tableau que tu as complété sur un graphique comme celui qui est présenté ci-dessous. La relation entre des variables inversement proportionnelles comme ***v*** et *t* <u>**prend la forme d'une courbe qui tend à s'approcher des axes.**</u>



Situation 4

À l'aide du modèle $v = \frac{d}{t}$ complète le tableau suivant pour des trajets à une vitesse constante de **100 km/h**.

TEMPS	**DISTANCE**
2 h	
4 h	
8h	
1 h	
1/2 h	

Dans le modèle algébrique en haut de la page, encercle les 2 variables identifiées dans le tableau et réponds aux questions.

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu doubles **t** ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu quadruples **t** ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu divises **t** par 2 ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu divises **t** par 4 ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Comme tu as pu le constater dans cette situation, les variables ***d*** et ***t*** subissent le même changement. Lorsque la vitesse demeure constante, si on multiplie le temps par un certain nombre, la distance est multipliée par le même nombre. De la même manière, lorsque le temps est divisé par un certain nombre, la distance est divisée par le même nombre.

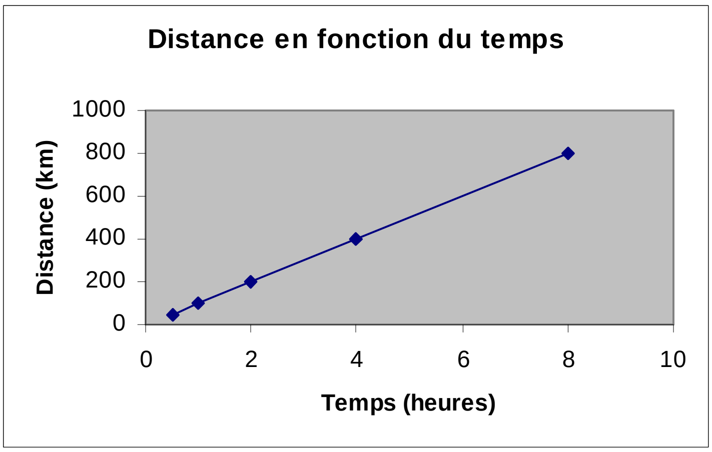
- Selon le tableau, les variables ***d*** et ***t*** subissent les mêmes changements (multiplication ou division). On dit qu'elles sont ***directement proportionnelles.***

- On peut savoir que des variables sont directement proportionnelles à partir de leur position dans un modèle algébrique. Dans un modèle comme celui-ci :

$$v=\frac{d}{t}$$

des variables comme ***d*** et ***t***, **<u>situées du même côté du signe d'égalité, l'une au numérateur et l'autre au dénominateur</u>** sont directement proportionnelles. Pour que la vitesse demeure constante, une augmentation du temps doit être associée à une augmentation proportionnelle de la distance.

- On peut représenter les données du tableau que tu as complété sur un graphique comme celui qui est présenté ci-dessous. La relation entre des variables directement proportionnelles comme ***d*** et *t* est représentée par **<u>une droite</u>** qui passerait par (0,0) si on la prolongeait. Cependant, comme la division par 0 n'est pas définie, la droite s'arrête avant (0,0) dans ce cas-ci.



Situation 5

À l'aide du modèle $d = vt$ complète le tableau suivant pour un temps constant de **3 heures**.

VITESSE	**DISTANCE**
100 km/h	
200 km/h *	
400 km/h *	
50 km/h	
25 km/h	

*encore une fois, c'est évident que ce n'est toujours pas en automobile …

Dans le modèle algébrique en haut de la page, encercle les 2 variables identifiées dans le tableau et réponds aux questions.

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu doubles **v** ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu quadruples **v** ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu divises **v** par 2 ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il à **d** lorsque tu divises **v** par 4 ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Parmi les caractéristiques suivantes, choisis celles qui s'appliquent à la dernière situation :

Les variables sont directement proportionnelles.		Les variables sont inversement proportionnelles.	
Les variables subissent les mêmes changements.		Les variables subissent des changements inverses.	
Les variables sont toutes les deux au numérateur et elles sont situées de chaque côté du =.		Les variables sont situées de chaque côté du =, l'une au numérateur et l'autre au dénominateur.	
Les variables sont situées du même côté du =, l'une au numérateur, l'autre au dénominateur.		Les variables sont reliées par une multiplication, elles sont du même côté du =.	
Le graphique prend la forme d'une droite qui passe par le point (0,0).		Le graphique prend la forme d'une courbe qui tend à s'approcher des axes.	

Situation 6

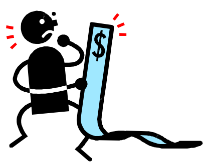
Pour faire des travaux de rénovation dans ma maison, j'ai fait appel à un électricien. Il m'a demandé 60$ pour son déplacement et 75$ pour chaque heure de travail.

- Fais un modèle algébrique qui représente la facture que l'électricien m'a présentée selon le nombre d'heures travaillées (sans les taxes). N'oublie pas d'identifier les variables que tu utilises.

- À l'aide de ton modèle, calcule à combien s'élève la facture si l'électricien travaille 3 heures chez moi.

- Si l'électricien travaille 2 fois plus longtemps chez moi que dans la question précédente, aurait-il raison de me demander 2 fois plus cher ? Sans calculer, explique ta réponse.

……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………
………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………



- Vérifie ta conclusion à l'aide de ton modèle algébrique.

- Complète le tableau suivant en calculant le coût pour chacun des temps de travail donnés. Utilise ton modèle algébrique pour faire tes calculs.

TEMPS	**COÛT**
2h	
4h	
6h	
8h	
10h	

Qu'arrive-t-il au coût lorsque tu doubles le temps ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au coût lorsque tu triples le temps ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au coût lorsque tu quadruples le temps ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au coût lorsque tu divises le temps par 2 ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le coût de la facture augmente quand le temps de travail augmente ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le coût de la facture augmente **proportionnellement** au temps de travail ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, quel serait le coût de la facture si le temps de travail était de 0 heure ? C'est ce qui peut arriver par exemple si on fait venir le plombier et qu'il constate que le disjoncteur du chauffe-eau a déclenché et qu'il suffit de le remettre en position pour régler le problème.

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le graphique représentant le coût en fonction du temps ressemblerait à une droite passant par (0,0) ? Oui ou non ?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le coût de la facture et le temps au travail sont des variables directement proportionnelles ? Oui ou non ?

……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Situation 7

Dans le journal, j'ai vu une publicité pour un plombier qui demande 90$ de l'heure, mais qui ne charge pas de frais de déplacement. J'aimerais vérifier s'il aurait été plus avantageux de l'engager à la place de celui que j'ai fait venir.

- Fais un modèle algébrique qui représente la facture que l'électricien m'aurait présentée selon le nombre d'heures travaillées (sans les taxes). N'oublie pas d'identifier les variables que tu utilises.

- À l'aide de ton modèle, calcule à combien s'élève la facture pour 3 heures chez moi.

- Si cet électricien travaillait 2 fois plus longtemps chez moi que dans la question précédente, aurait-il raison de me demander 2 fois plus cher ? Sans calculer, explique ta réponse.
  ……………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………
  ………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………

- Vérifie ta conclusion à l'aide de ton modèle algébrique.

- Complète le tableau suivant en calculant le coût pour chacun des temps de travail donnés. Utilise ton modèle algébrique pour faire tes calculs.

TEMPS	**COÛT**
2h	
4h	
6h	
8h	
10h	

Qu'arrive-t-il au coût lorsque tu doubles le temps ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au coût lorsque tu triples le temps ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au coût lorsque tu quadruples le temps ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au coût lorsque tu divises le temps par 2 ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le coût de la facture augmente quand le temps de travail augmente ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

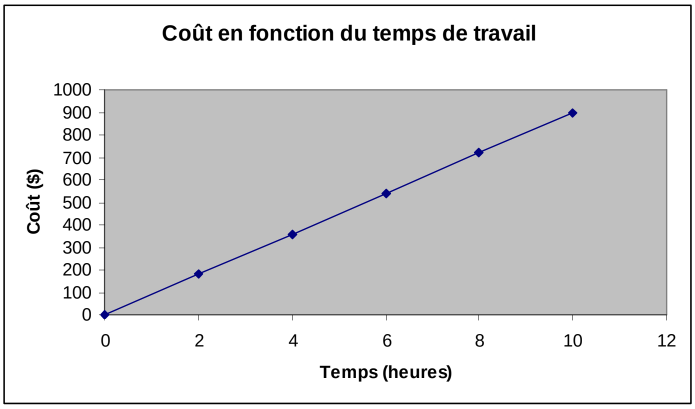
Dans ce modèle, est-ce que le coût de la facture augmente **proportionnellement** au temps de travail ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, quel serait le coût de la facture si le temps de travail était de 0 heure ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le graphique représentant le coût en fonction du temps ressemblerait à une droite passant par (0,0) ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

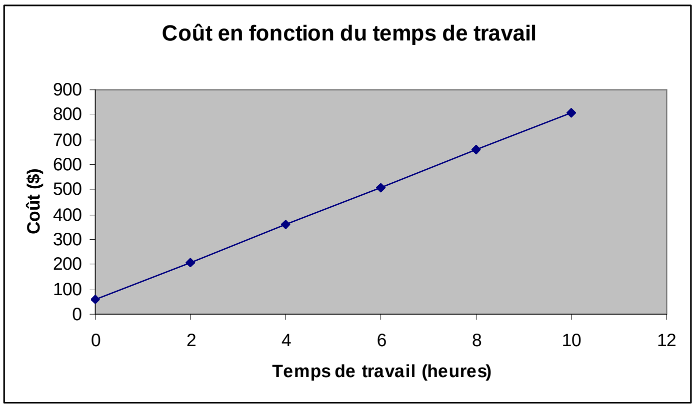
Dans ce modèle, est-ce que le coût de la facture et le temps au travail sont des variables directement proportionnelles ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Voici les graphiques qui représentent les situations 6 et 7. Sous chaque graphique écris le modèle algébrique auquel il correspond et indique s'il s'agit de variables proportionnelles ou non.



Modèle algébrique : ………………………………………………………………

Directement proportionnelles : oui ou non ………………………………………



Modèle algébrique : ………………………………………………………………

Directement proportionnelles : oui ou non ………………………………………

Observe les modèles algébriques que tu as créés dans les situations 6 et 7. Quelle partie d'un modèle algébrique te permet de reconnaître une situation où les variables ne sont ni directement proportionnelles, ni inversement proportionnelles ?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

En t'aidant des tableaux de données et des graphiques peux-tu dire s'il y a des situations où il est préférable d'engager le plombier qui demande 75$ de l'heure plus 60$ de frais de déplacement ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

En t'aidant des tableaux de données et des graphiques peux-tu dire s'il y a des situations où il est préférable d'engager le plombier qui demande 90$ de l'heure sans charger de frais de déplacement ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

En t'aidant des tableaux de données et des graphiques peux-tu dire s'il y a des situations où les deux plombiers chargeront le même montant pour effectuer le travail ?
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

Situation 8

Nadine fabrique des colliers de perles de verre qu'elle vend au marché du Vieux-Port. Lorsqu'elle s'installe pour travailler, elle doit prendre 20 minutes pour préparer son matériel, puis 45 minutes pour fabriquer chaque collier et enfin, 15 minutes pour ranger son matériel à la fin de la journée.

- Fais un modèle algébrique qui représente le temps de travail fait par Nadine selon le nombre de colliers qu'elle a fabriqués dans sa journée. N'oublie pas d'identifier les variables que tu utilises.

- À l'aide de ton modèle, calcule le temps qu'elle devra passer au travail pour fabriquer 4 colliers.

- Si Nadine veut fabriquer 2 fois plus de colliers, devra-t-elle passer 2 fois plus de temps au travail ? Sans calculer, explique ta réponse.
  …………………………………………………………………………………………………
  …………………………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………

- Vérifie ta conclusion à l'aide de ton modèle algébrique.

- Complète le tableau suivant en calculant le temps pour chacun des nombres de colliers donnés. Utilise ton modèle algébrique pour faire tes calculs.

NOMBRE DE COLLIERS	**TEMPS**
4	
8	
12	
2	
1	

Qu'arrive-t-il au temps lorsque tu doubles le nombre de colliers ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au temps lorsque tu triples le nombre de colliers ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au temps lorsque tu divises le nombre de colliers par 2 ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Qu'arrive-t-il au temps lorsque tu divises le nombre de colliers par 4 ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le temps de travail augmente quand le nombre de colliers fabriqués augmente ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le temps de travail augmente **proportionnellement** au nombre de colliers fabriqués ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Est-ce que le graphique représentant ce modèle algébrique ressemblerait à une droite passant par (0,0) ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Dans ce modèle, est-ce que le temps au travail et le nombre de colliers fabriqués sont des variables directement proportionnelles ? Oui ou non ?
……………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………

Voici quelques modèles algébriques.

- Dans chacune des équations, commence par encercler le **a** et le **b**.
- Pour chacun de ces modèles algébriques, indique si les variables **a** et **b** sont *directement proportionnelles*, *inversement proportionnelles* ou *ni l'un ni l'autre*.
- Indique aussi le changement que subira la variable **a** si **on double la valeur de la variable b**, tout en gardant celle de la variable **c** constante.

	Choix de réponses :	**Choix de réponses** :
	• Directement proportionnelles • Inversement proportionnelles • Ni l'une, ni l'autre	• a double • a est ÷ par 2 • a augmente sans doubler • a diminue sans être ÷ par 2
$a=bc$		
$c=ba$		
$a=\frac{3}{b}+c$		
$a=\frac{b}{c}$		
$a=3b+c$		
$a=\frac{c}{b}$		

Finalement, voici diverses représentations de variables **directement proportionnelles, inversement proportionnelles ou ni l'un ni l'autre**. Pour chaque situation identifie le type de variables.

Situation A

Pour respecter les normes de sécurité, l'électricien doit s'assurer que la puissance maximale des appareils branchés ne dépassera pas un certain niveau. La formule utilisée se lit ainsi : la force du courant multipliée par l'intensité du courant électrique donnera la puissance du courant électrique. Le lien qui unit la force à la puissance est…

Type de variables : ______________________

Pour une puissance donnée, le lien qui unit la force du courant à son intensité est…

Type de variables : ______________________

Situation B

Volume dans le réservoir d'eau chaude après une douche chez les *Latulippe*

Temps (min)	0	5	10	15	20	25	30
Volume (L)	270	225	180	135	90	45	0

Type de variables : ______________________

Situation C

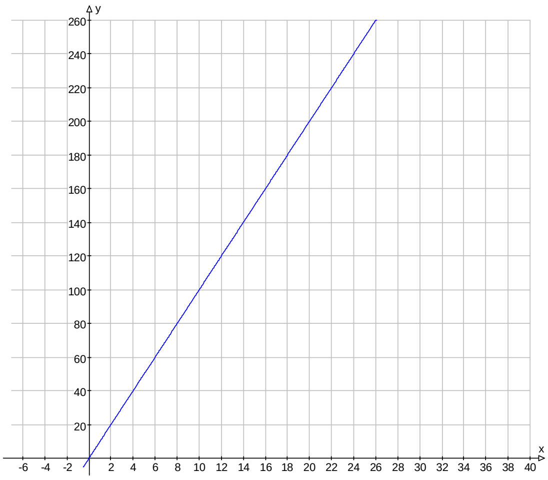
Mon automobile consomme 7L d'essence aux 100km. Je peux traduire cette situation par le modèle algébrique suivant :

$q = \frac{7d}{100}$ où q = quantité d'essence en litres et d = la distance en km

Les variables q et d sont…

Type de variables : ______________________

Situation D



Dans cette représentation graphique, le type de variables est _______________

Situation E

Pour ériger un mur de pierre à l'arrière d'un terrain commercial, l'entrepreneur a estimé qu'il aura besoin de l'équivalent de 160 hommes-heures. Cela signifie que le produit du nombre d'hommes par le nombre d'heures travaillées par chacun d'eux donnera 160. Par exemple, 2 hommes travaillant 80 heures chacun ou encore 4 hommes travaillant 40 heures chacun pourront compléter le travail. Dans ce modèle les variables nombre d'hommes et nombre d'heures travaillées par chacun sont…

Type de variables : ________________________

Situation F

Lorsqu'on étudie le comportement des gaz, on peut constater qu'en diminuant le volume d'un gaz, sa pression augmente et qu'inversement en augmentant le volume d'un gaz sa pression diminue. La loi de Boyle-Mariotte exprime le lien entre volume et pression sous la forme du modèle algébrique suivant :

$$pV = k$$

dans lequel p représente la pression, V le volume et k une constante qui dépend de la température et de la quantité de gaz. D'après ce modèle, les variables p et V sont…

Type de variables : ________________________