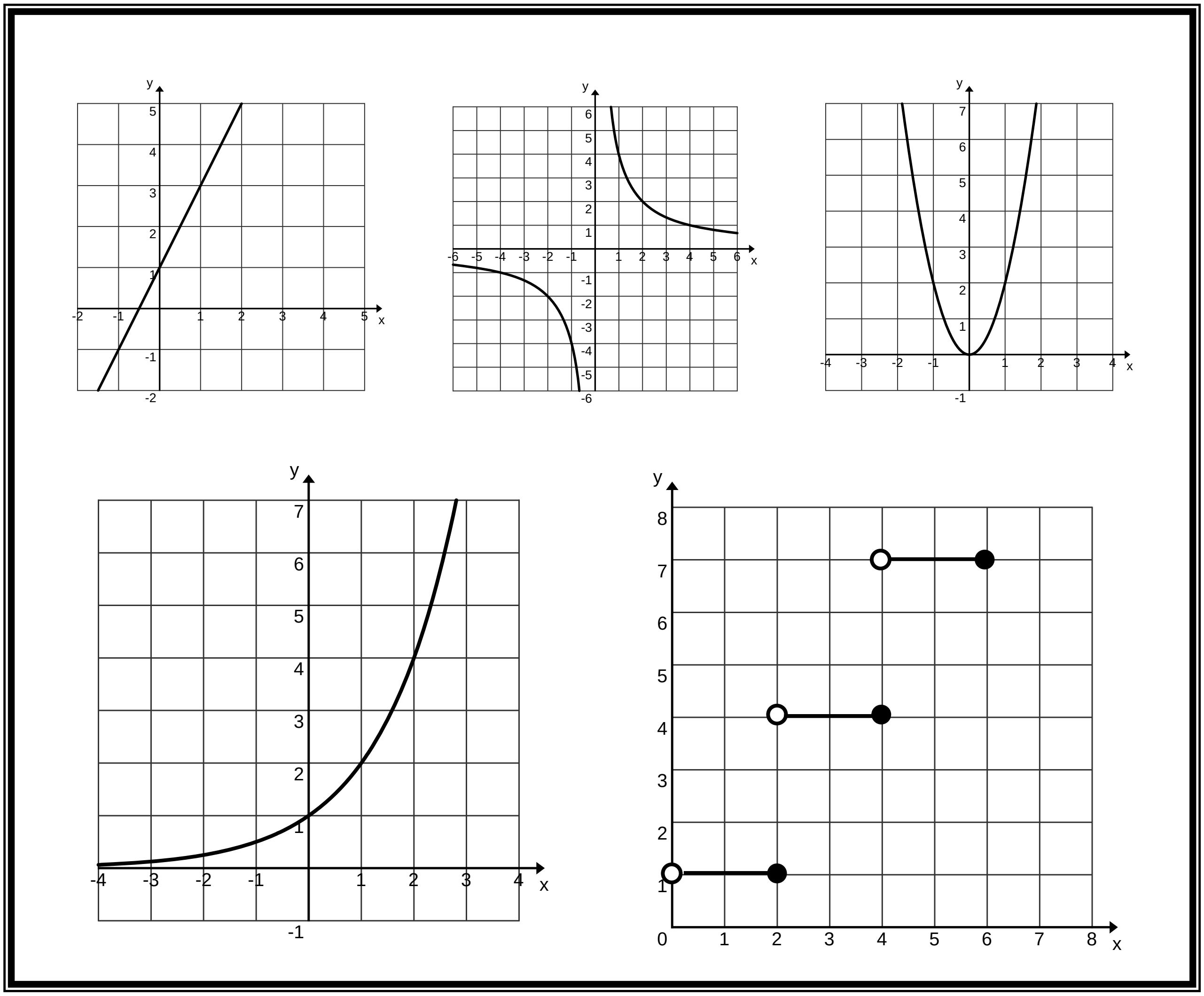
Mathématique : Culture, Société et Technique
$4^{ème}$ secondaire

Les fonctions :



Corrigé

1) **Relation** :

Existence d'un lien entre deux variables :

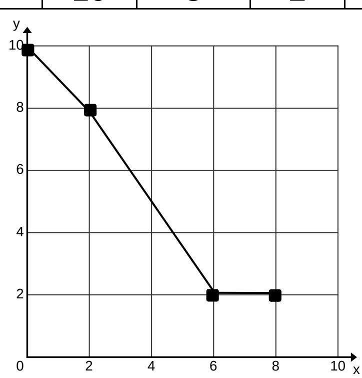
- Variable indépendante : quantité dont la variation entraîne une réaction de l'autre variable;
- Variable dépendante : quantité qui réagit à la variation de l'autre variable.

Relation	Variable dépendante	Variable indépendante
La masse d'un roast beef et son prix.	Prix	Masse
	Le prix d'un roast beef **dépend de** sa masse	
L'aire totale d'une surface et le temps requis pour la peindre.	Temps	Aire totale
	Le temps pour peindre une surface **dépend de** son aire totale.	
La distance parcourue (en km) et la quantité d'essence qui reste dans le réservoir (en l)	Quantité d'essence (en l)	Distance parcourue (en km)
	Le quantité d'essence qui reste dans le réservoir (en l) **dépend de** la distance parcourue (en km).	

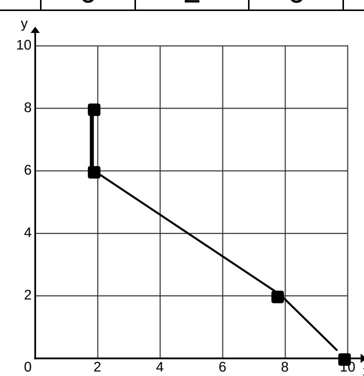
2) **Réciproque**

Une **réciproque**, s'obtient en intervertissant les valeurs de chacun des couples d'une relation entre deux variables.

x	0	2	6	8
y	10	8	2	2



x	10	8	2	2
y	0	2	6	8



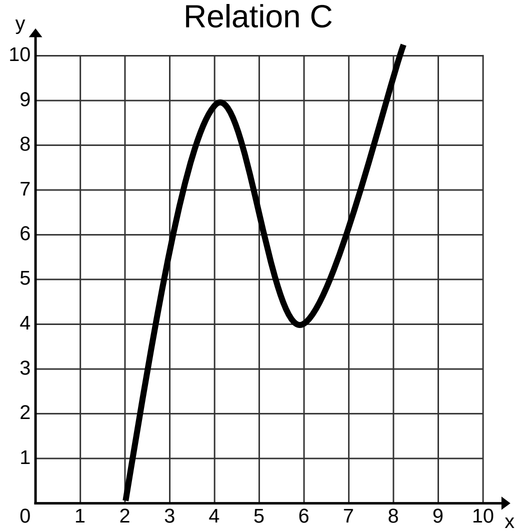
3) **<u>Fonction</u> :**

Une relation entre deux variables est une **fonction**, lorsque à chaque valeur de la variable indépendante est associée **au plus** une valeur de la variable dépendante. À chaque x est associé au plus un y.

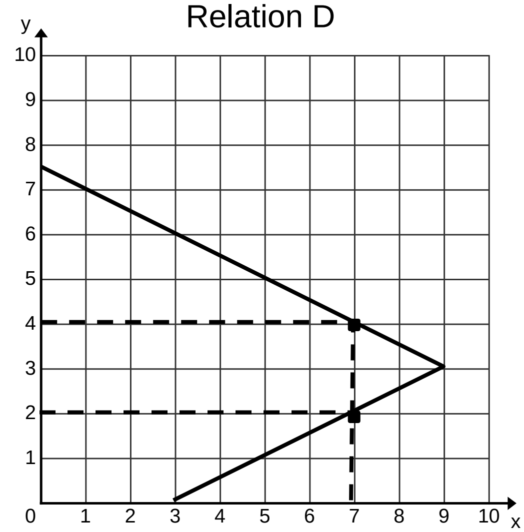
Note : Dans la représentation graphique d'une fonction, à chaque abscisse est associée au plus une ordonnée.
Une droite verticale ne peut pas couper deux fois la fonction.

Exemples :

Relation C



Relation D



La relation C est une fonction.

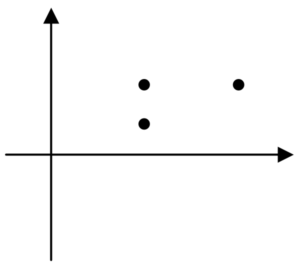
La relation D n'est pas une fonction car :

- pour x = 7, la relation associe 2 ordonnées, soit 2 et 4 (l'image de 7 est 2 ou 4).

Exercices : Est-ce que les relations suivantes sont des fonctions?

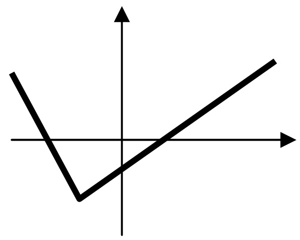
a) Graphiques cartésiens :

(1)



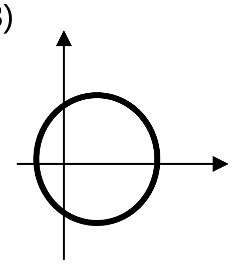
non

(2)



oui

(3)



non

b) Ensembles en extension :

$\{(0, 1), (0, 2), (3, 1)\}$	non
$\{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$	oui
$\{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$	oui

Le **même x** ne peut pas avoir **deux y différents**.

4) Notation **des fonctions** :

Soit la relation suivante : **y** = 4x – 10

Cette relation est une fonction, car pour un x donné, il existe au plus un y.

Comme il s'agit d'une fonction, nous écrirons sa règle de cette façon :

f(x) = 4x – 10

La variable y dépend de la valeur de la variable x. Nous dirons que **la valeur de y est fonction de la valeur de x**. D'où nous remplacerons **y** par **f(x)**.

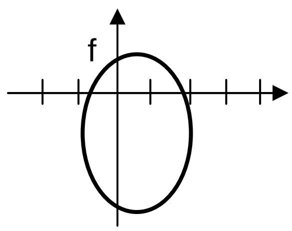
5) <u>Les propriétés des fonctions ou des relations</u>

<u>Domaine</u> : Les x des couples de la relation.
Les x pour lesquels la relation existe.

notation : dom f = $x \in [\, x_1 ,\; x_2 \,]$

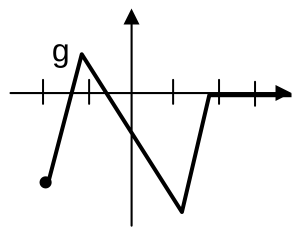
Exemples :

a)



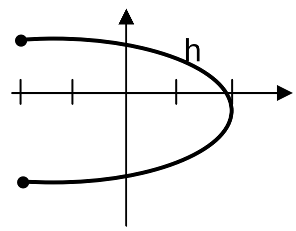
dom f : $x \in [-1, 2]$

b)



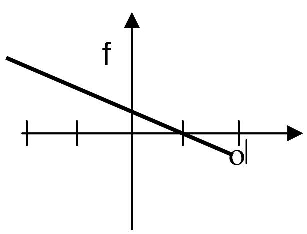
dom g : $x \in [-2, \infty[$

c)



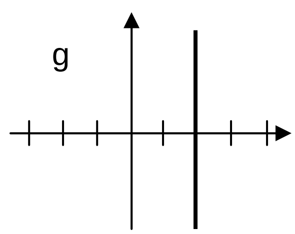
dom h : $x \in [-2, 2]$

d)



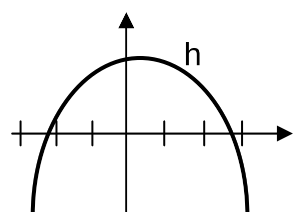
dom f : $x \in]-\infty, 2[$

e)



dom g : $x \in \{2\}$

f)

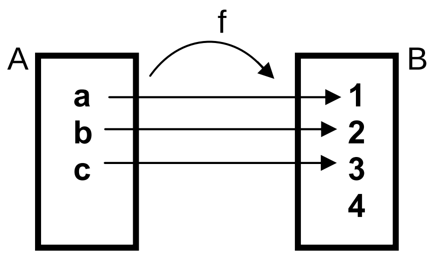


dom h : $x \in IR$

Codomaine ou **image** : Les y des couples de la relation.
Les y pour lesquels la relation existe.

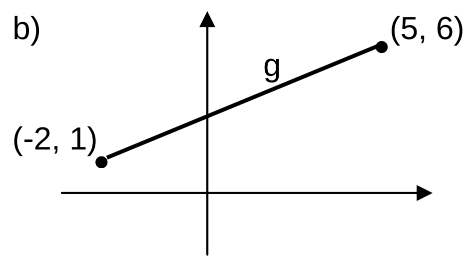
notation : codom f ou ima f = y $\in$ [y_1 , y_2]

Exemples :

a) 

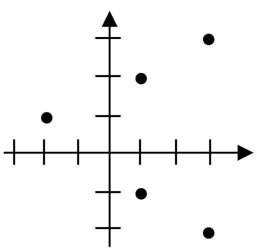
dom f : $x \in \{a, b, c\}$

ima f : $y \in \{1, 2, 3\}$

b) 

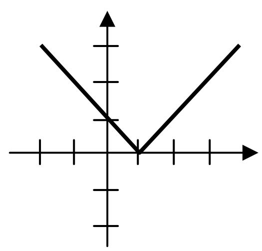
dom g : $x \in [-2, 5]$

ima g : $y \in [1, 6]$

c) 

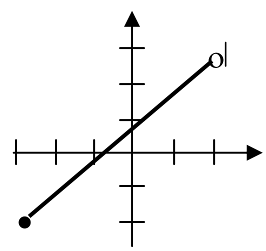
dom : $x \in \{-2, 1, 3\}$

ima : $y \in \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

d) 

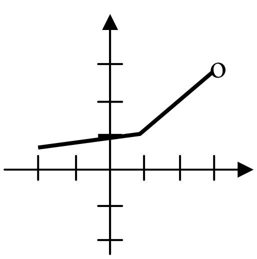
dom : $x \in IR$

ima : $y \in [0, \infty[$

e) 

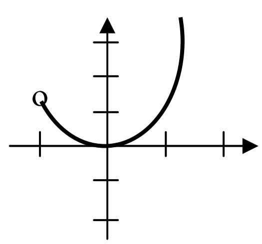
dom : $x \in [-3, 2[$

ima : $y \in [-2; 2{,}5[$

f) 

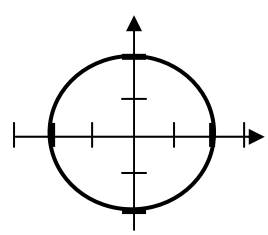
dom = $x \in \,]-\infty, 3[$

ima = $y \in \,]-\infty, 3[$

g) 

dom = $x \in \,]-1, \infty[$

ima = $y \in [0, \infty[$

h) 

dom = $x \in [-2, 2]$

ima = $y \in [-2, 2]$

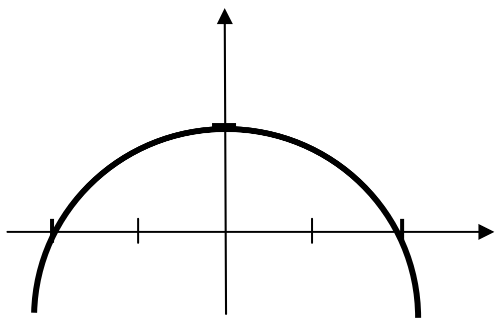
i) f = {(0, 6), (1, 4), (2, 2), (3, 0)} dom f= $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ima f: $y \in \{0, 2, 4, 6\}$

Zéro ou **abscisse à l'origine** : valeur de **x** , lorsque **y = 0**.

Valeur initiale ou **ordonnée à l'origine** : valeur de **y** , lorsque **x = 0.**

Exemples:

a)



les zéros sont : -2 ou 2

la valeur initiale est : 1

les coordonnées à l'origine sont :

(-2, 0) , (2, 0) , (0, 1)

b) g(x) = $\frac{-1}{4}x+3$

$$0 = \frac{-1}{4}x + 3$$

$$-3 = \frac{-1}{4}x$$

$$-12 = -1x$$

$$12 = x$$

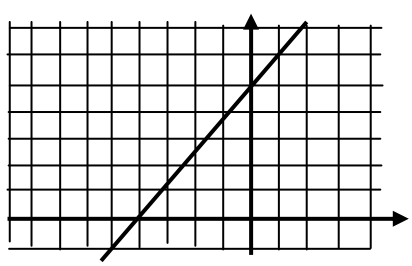
le zéro est : 12

la valeur initiale est : 3

les coordonnées à l'origine sont :

(12, 0) (0, 3)

c)



le zéro est : -4

la valeur initiale est : 5

les coordonnées à l'origine sont :

(-4, 0) (0, 5)

d) h(x) = $\frac{2}{3}x - \frac{4}{5}$

$$0 = \frac{2}{3}x - \frac{4}{5} \qquad \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = x$$

$$\frac{4}{5} = \frac{2}{3}x \qquad \frac{2}{5} \cdot 3 = x$$

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = x \qquad \frac{6}{5} = x$$

le zéro est : $\frac{6}{5}$

la valeur initiale est : $\frac{-4}{5}$

les coordonnées à l'origine sont :

($\frac{6}{5}$, 0) (0, $\frac{-4}{5}$)

e) $f(x) = 3x + 30$

$$0 = 3x + 30$$

$$-30 = 3x$$

$$\frac{-30}{3} = x$$

$$-10 = x$$

le zéro est : -10

la valeur initiale est : 30

les coordonnées à l'origine sont :

(-10, 0) (0, 30)

f) $i(x) = \frac{x}{9} - 20$

$$0 = \frac{x}{9} - 20$$

$$20 = \frac{x}{9}$$

$$20 \cdot 9 = x$$

$$180 = x$$

le zéro est : 180

la valeur initiale est : -20

les coordonnées à l'origine sont :

(180, 0) (0, -20)

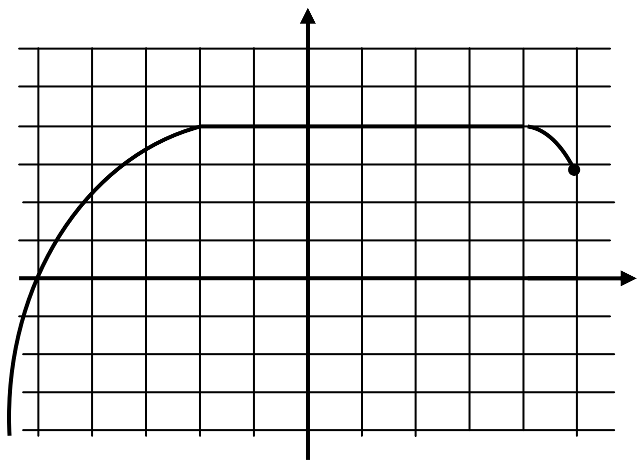
Variation de la fonction : croissance et décroissance

Si les **x augmentent** et que les **y augmentent ou demeurent constants** alors la fonction est **croissante** sur cet intervalle des x.

Si les **x augmentent** et que les **y diminuent ou demeurent constants** alors la fonction est décroissante sur cet intervalle des x.

Exemples :

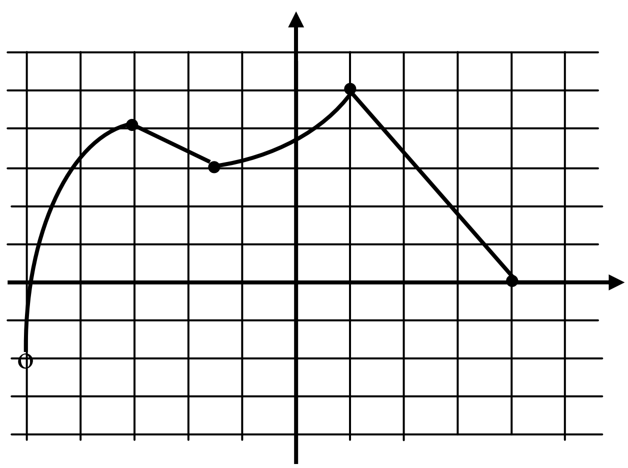
a)



f est croissante : x ∈ $]-\infty, 4]$

f est décroissante : x ∈ $[-2, 5]$

b)



Donne les intervalles pour lesquels la fonction est croissante : x ∈ $]-5, -3]$ ∪ $[-1{,}5 : 1]$

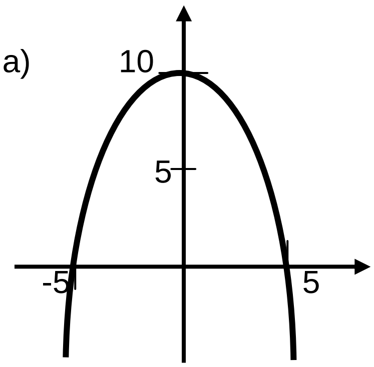
Donne les intervalles pour lesquels la fonction est décroissante :
x ∈ $[-3 ; -1{,}5]$ ∪ $[1, 4]$

Les extrémums d'une fonction

Le **plus grand** y est le **maximum** de la fonction (maximum absolu).

Le **plus petit y** est le **minimum** de la fonction (minimum absolu).

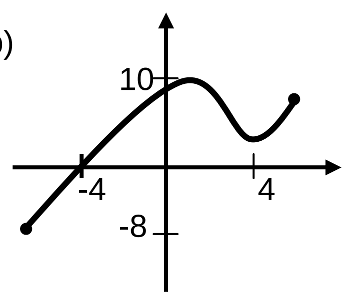
Exemples : a)



max f = 10

min f = aucun

b)



max f = 10

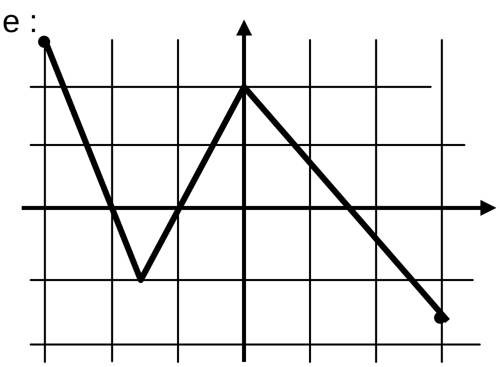
min f = -8

Signes d'une fonction

Une fonction est **positive** sur **un intervalle de l'axe des x** où **les valeurs de y sont plus grandes ou égales à 0**.

Une fonction est **négative** sur **un intervalle de l'axe des x** où **les valeurs de y sont plus petites ou égales à 0**.

Exemple :

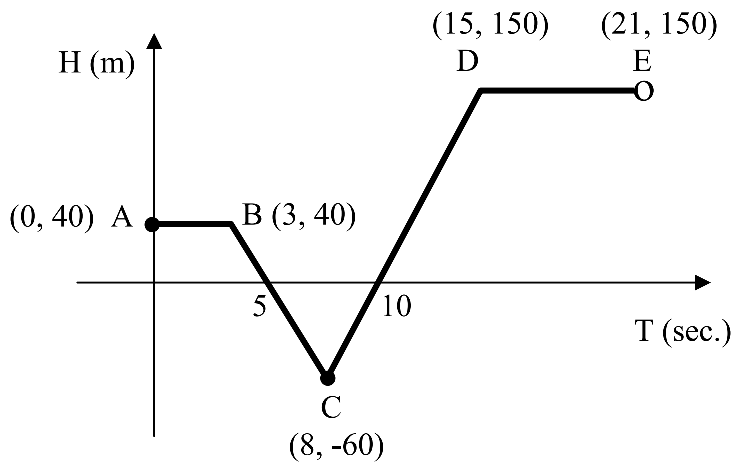


f est positive si x $\in$ $[-3, -2] \cup [-1;\ 1{,}5]$

f est négative si x $\in$ $[-2, -1] \cup [1{,}5;\ 3]$

Exercices :

1) Voici la hauteur (en m) du vol d'un oiseau prédateur au-dessus de l'océan selon la durée (en sec).



a) Dom : $x \in$ [0 , 21[. b) Intervalle de croissance : $x \in$ [0 , 3] $\cup$ [8 , 21 [

.

Ima : $y \in$ [-60 , 150] . Intervalle de décroissance : $x \in [0, 8] \cup [15, 21[$

c) Min : -60 d) Les coordonnées à l'origine : (5, 0), (10, 0)

Max : 150 (0, 40)

e) Signe : intervalle positif : $x \in [0, 5] \cup [10, 21[$

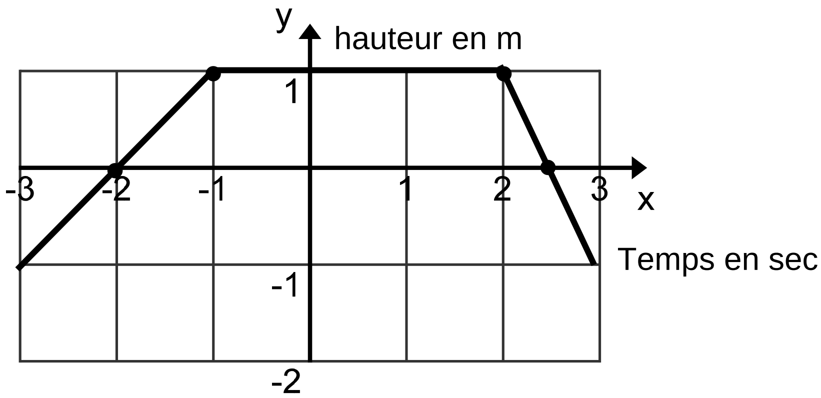
intervalle négatif : $x \in [5, 10]$

nul : $x \in \{5, 10\}$

f) Que représentent les zéros dans ce graphique ?

L'oiseau rentre dans l'eau à 5 secondes et sort de l'eau à 10 secondes

2)



a) Dom : x $\in$ IR

Ima : $y \in \ ]-\infty, 1]$

b) Intervalle de croissance : $x \in \ ]-\infty, 2]$

Intervalle de décroissance : $x \in \ ]-1, \infty[$

c) Min : aucun

Max : 1

d) Les coordonnées à l'origine : (-2, 0), (2,5; 0)

(0, 1)

e) Signe : intervalle positif : $x \in \ [-2;\ 2{,}5]$

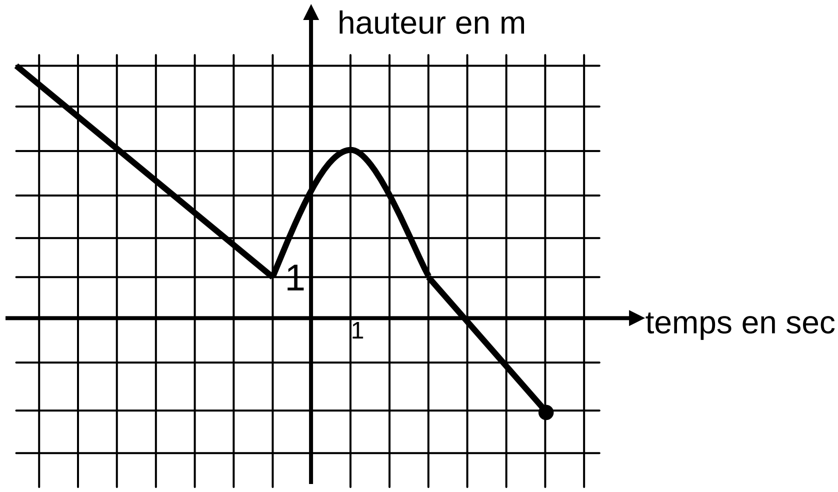
intervalle négatif : $x \in \ ]-\infty, -2] \ \cup \ [2{,}5, \infty[$

nul : $x \in \{-2;\ 2{,}5\}$

f) Quel nom donne-t-on aux valeurs x = -2 ou x = 2,5 dans ce graphique ?

Les zéros de la fonction ou les abscisses à l'origine.

3)



a) Dom : $x \in \ ]-\infty, 6]$

Ima : $y \in \ [-2, \infty[$

b) Intervalle de croissance : $x \in \ [-1, 1]$

Intervalle de décroissance : $x \in \ ]-\infty, -1] \ \cup \ [1, 6]$

c) Min : -2

Max : aucun

d) Les coordonnées à l'origine : (4, 0)

(0, 3)

e) Signe : intervalle positif : $x \in \ ]-\infty, 4]$

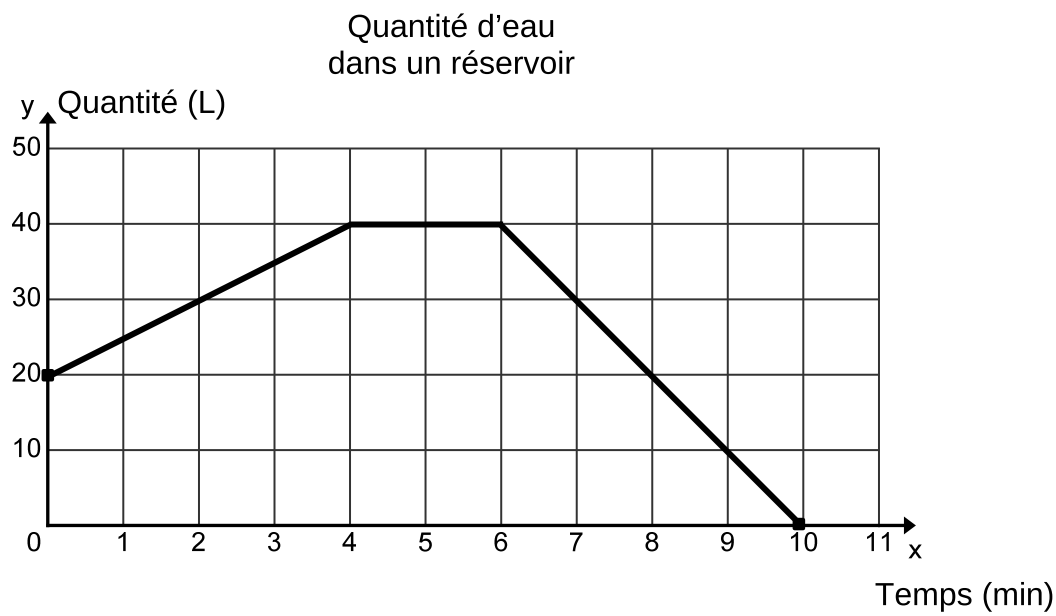
intervalle négatif : $x \in \ [4, 6]$

nul : $x \in \{ 4 \}$

f) Quel nom donne-t-on à la valeur y = 3 dans ce graphique ?

Valeur initiale ou ordonnée à l'origine

4)



a) Le domaine est associé au temps écoulé en minutes.

Le domaine est $x \in [0, 10]$.

b) L'image correspond aux quantités d'eau en litres.

L'image est $y \in [0, 40]$.

c) La quantité d'eau dans le réservoir est croissante durant les 6 premières minutes.

Elle est décroissante à partir de la 4ème minute.

Entre 4 et 6 min, elle est constante.

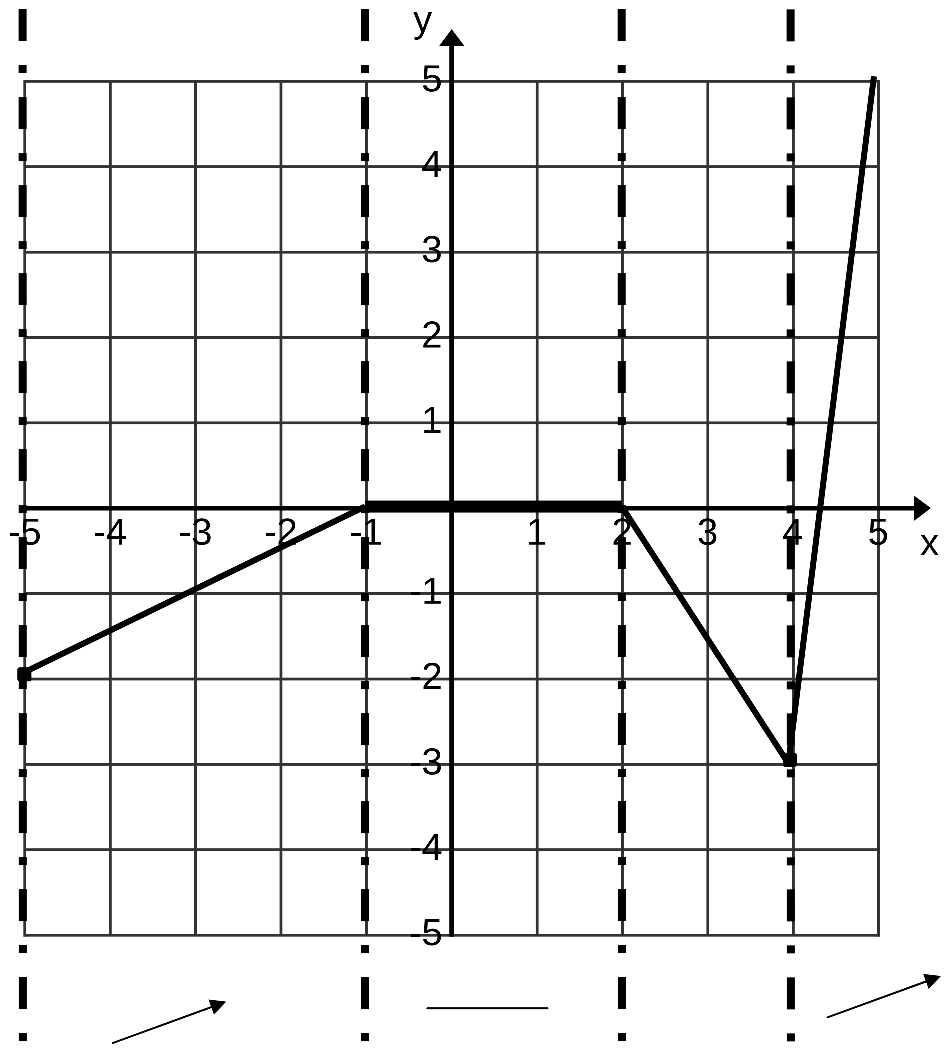
d) La quantité minimale d'eau est de 0 L et la quantité maximale est de 40 L.

e) L'ordonnée à l'origine est 20, car le réservoir contenait initialement 20 L.

L'abscisse à l'origine est 10, car le réservoir est vide après 10 minutes.

5) Représente graphiquement une fonction présentant les propriétés suivantes :

- minimum absolu de -3
- pas de maximum absolu
- croissante de $[\mathbf{-5},\ \mathbf{2}]\ \cup [\mathbf{4}, \infty[$
- nulle de $[\mathbf{-1},\ \mathbf{2}]$



6) **Types de fonctions**

Il existe plusieurs types de fonctions qui servent à modéliser différentes situations de la vie courante. Chaque type de fonction se caractérise par une équation ou une règle.

a) **Fonctions linéaires** (fonctions affines)

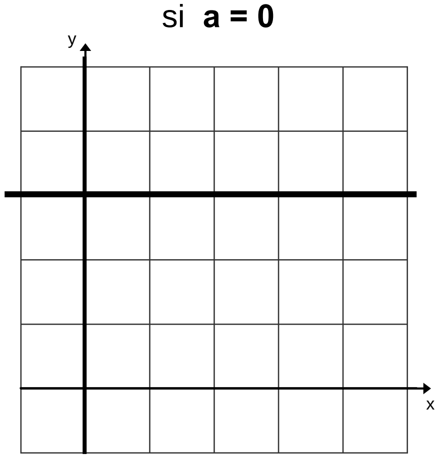
Ces fonctions sont représentées par des droites.

Équation de la forme : $y = ax + b$ où $a = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

b : ordonnée à l'origine

Les fonctions linéaires prennent différents noms selon la valeur des paramètres a et b.

si **a = 0**



$y = 0x + b$

$y = b$

Fonction affine de variation nulle

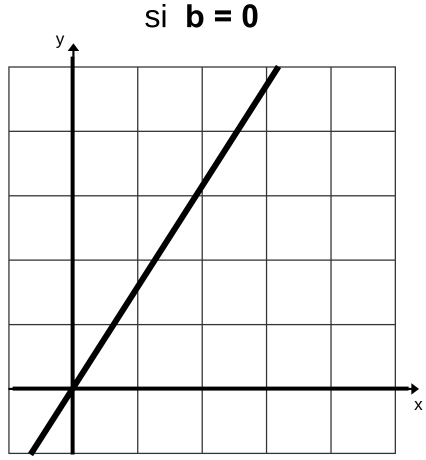
ou

Fonction polynomiale de degré 0

ou

Fonction constante

si **b = 0**



$y = ax + 0$

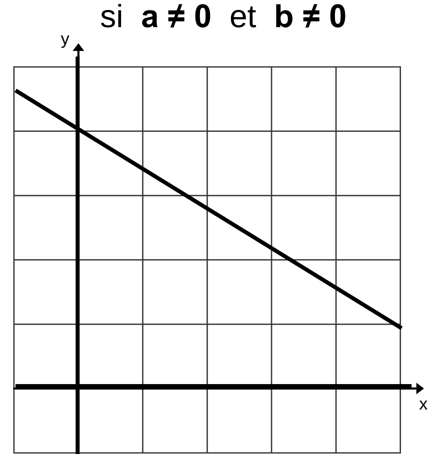
$y = ax$

Fonction affine de variation directe

ou

Fonction polynomiale de degré 1

si **a ≠ 0** et **b ≠ 0**



$y = ax + b$

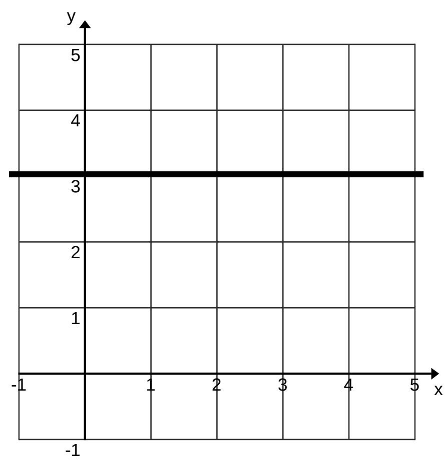
Fonction affine de variation partielle

ou

Fonction polynomiale de degré 1

Exemple :

1. Quelle est l'équation de la fonction représentée ci-dessous ?



x	y
-1	3
0	3
1	3

Taux de variation :

$$a = \frac{3-3}{0--1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$a = \frac{3-3}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

Réponse : $\boldsymbol{f(x) = 0x + 3}$

$\boldsymbol{f(x) = \quad 3}$

Nom de ce type de fonction : Fonction constante
ou
Fonction affine de variation nulle
ou
Fonction polynomiale de degré 0

Particularités :

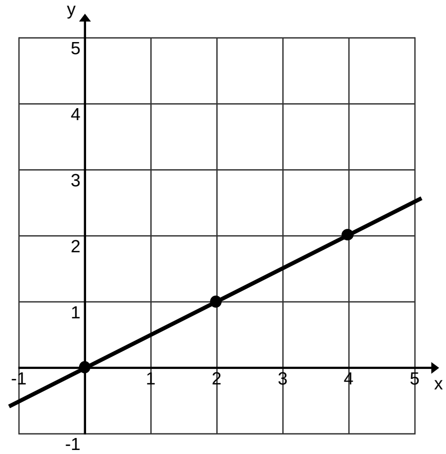
Dans le graphique : droite horizontale

Dans la table de valeurs : Le **y** est constant pour tous les **x**,

Taux de variation = 0

Mots clés dans un texte : Le **y** a toujours la même valeur **peu importe** la valeur de **x**

2. Quelle est l'équation de la fonction représentée ci-dessous ?



x	y
0	0
2	1
4	2

Taux de variation :

$$a = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$a = \frac{2-1}{4-2} = \frac{1}{2}$$

Réponse : $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x + 0}$

$\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}x}$

Nom de ce type de fonction : Fonction affine de variation directe
ou
Fonction polynomiale de degré 1

Particularités :

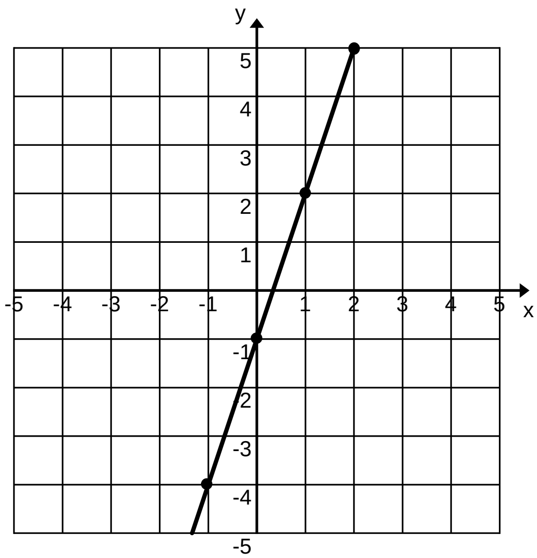
Dans le graphique : droite oblique qui passe par (0, 0)

Dans la table de valeurs : $\frac{y}{x} = a$ pour tous les couples sauf pour (0, 0).

Situation directement proportionnelle

Mots clés dans un texte : La variable indépendante est multipliée par un nombre constant (taux de variation) pour donner la valeur de la variable dépendante.

3. Quelle est l'équation de la fonction représentée ci-dessous ?



x	y
-1	-4
0	-1
1	2
2	5

Taux de variation :

$$a = \frac{-1 - -4}{0 - -1} = \frac{3}{1} = 3$$

$$a = \frac{5-2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Réponse : f(x)= 3x - 1

Nom de ce type de fonction : Fonction affine de variation partielle
ou
Fonction polynomiale de degré 1

Particularités :

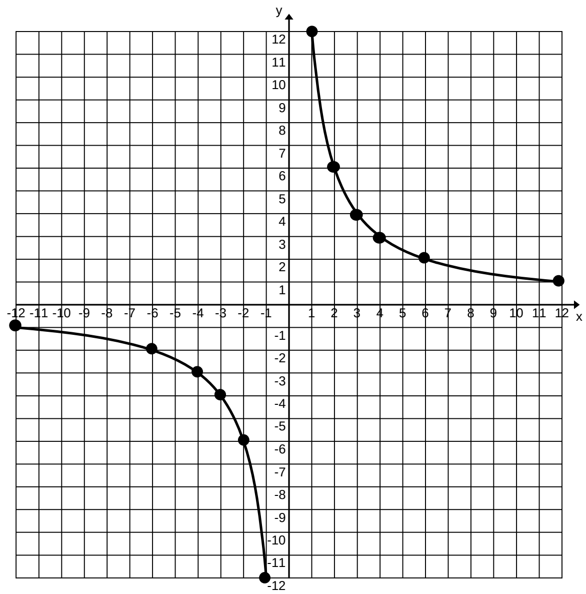
Dans le graphique : droite oblique qui **ne** passe **pas** par (0, 0)

Dans la table de valeurs : Lorsque les x augmentent de 1, les y augmentent de façon constante. Le taux de variation est constant.

Mots clés dans un texte : valeur (montant) fixe , valeur (montant) de base
valeur initiale

b) Fonction de variation inverse

Équation de la forme : $y = \dfrac{k}{x}$ où k est un nombre constant



x	y	x • y = k
1	12	1 ▪ 12 = 12
2	6	2 ▪ 6 = 12
3	4	3 ▪ 4 = 12
4	3	3 ▪ 4 = 12
-1	-12	-1 ▪ -12 = 12

Équation (ou règle) de la fonction :

$$\boxed{y = \frac{\mathbf{12}}{\boldsymbol{x}}}$$

Particularités :

Dans le graphique : courbe dont les extrémités se rapprochent de plus en plus lentement des axes, **sans les toucher**. La courbe est **asymptotique** aux axes.

Dans la table de valeurs : **x • y = k** pour tous les couples de la fonction.

Mots clés dans un texte : La variable dépendante représente une valeur unitaire.

Exercices : Trouve l'équation qui représente les fonctions suivantes.

1) Le coût pour faire déneiger son entrée est de 500$ pour l'hiver. Un entrepreneur veut connaître le coût par tempête. Traduis cette situation par une fonction.

x	**y**	x ▪ y = 500
1	500	1 ▪ 500 = 500
2	250	2 ▪ 250 = 500
5	100	5 ▪ 100 = 500
10	50	10 ▪ 50 = 500
50	10	50 ▪ 10 = 500

Fonction de variation inverse

$$y = \frac{500}{x}$$

2) L'intensité (I) d'un courant électrique dans un circuit de 12,5 volts dépend de la résistance (R) de ce circuit. Traduis cette situation par une fonction.

Voici des données prises par Jasmine en laboratoire :

Circuit électrique

Résistance (ohms)	0,5	5,0	10,0	20,0	500,0
Intensité (ampères)	25	2,5	1,25	0,625	0,025
x · y	12,5	12,5	12,5	12,5	12,5

Fonction de variation inverse

$$y = \frac{12,5}{x}$$

c) <u>**Fonction quadratique**</u> ou <u>**Fonction polynomiale de degré 2**</u>

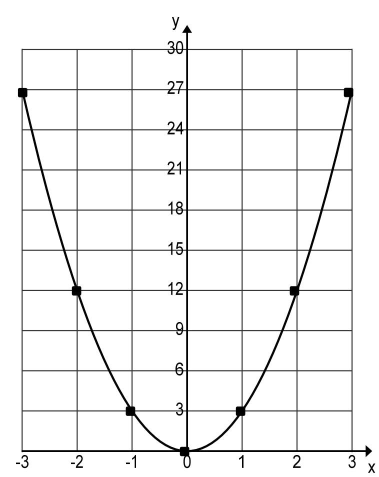
Équation de la forme : $y = ax^2$ où $a \neq 0$

a est un **facteur de changement d'échelle**

Particularités :

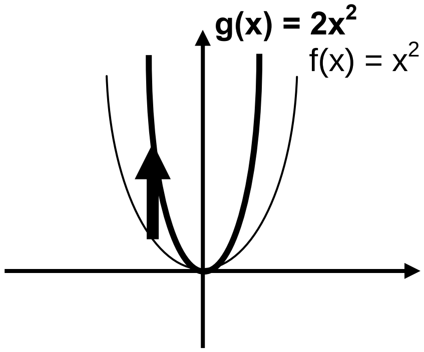
- $\dfrac{y}{x^2} = a$ pour tous les couples de la fonction sauf pour (0 , 0) ;
- Dans la table de valeurs, lorsque les x augmentent de façon constante, les y varient en formant une suite arithmétique;
- La représentation graphique est une courbe, nommée **parabole**, qui passe par (0, 0) .
- Le **sommet** de la parabole est (0, 0).

Exemple :

<table>
<tr><th>Description verbale</th><th>Règle</th><th>Table de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr>
<td>Le terrain de M. Côté est 3 fois plus grand que le terrain de Mme Boisvert.</td>
<td>$f(x) = 3x^2$</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>x</th><th>f(x)</th><th></th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>0</td><td>0</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>+1</td><td>1</td><td>3</td><td>+3</td><td></td></tr>
<tr><td>+1</td><td>2</td><td>12</td><td>+9</td><td>+6</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>3</td><td>27</td><td>+15</td><td>+6</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>4</td><td>48</td><td>+21</td><td>+6</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>5</td><td>75</td><td>+27</td><td>+6</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>6</td><td>108</td><td>+33</td><td>+6</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

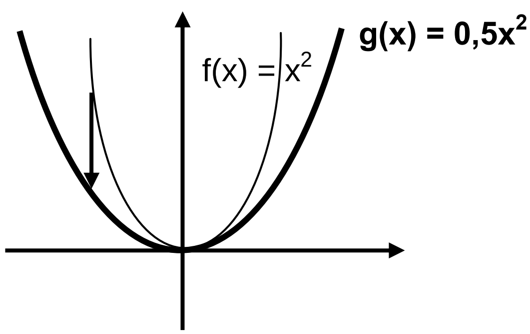
$$a = \frac{6}{2} = 3$$

La **variation du paramètre a** occasionne :

- 

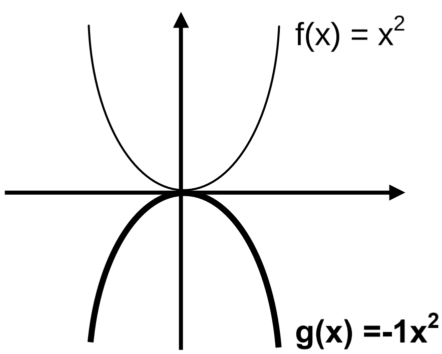
a > 1 : étirement vertical
parabole plus effilée
monte plus vite.

plus « a » s'éloigne de 1, plus la courbe est étirée verticalement

- 

0<**a < 1 :contraction verticale**
parabole plus évasée
monte moins vite

plus « a » se rapproche de 0, plus la courbe est contractée verticalement

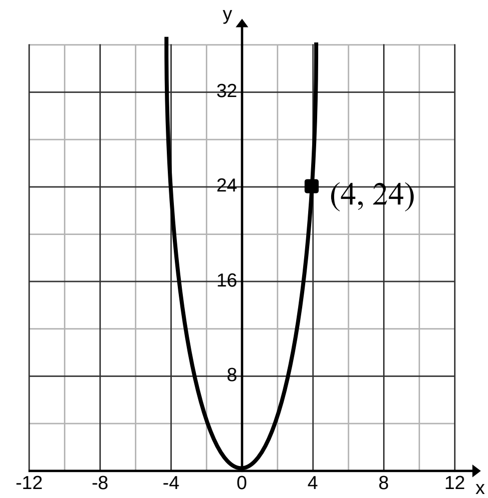
- 

a < 0 : réflexion selon l'axe des x

Recherche de la règle d'une fonction polynomiale de degré 2 de la forme :

$$f(x) = ax^2$$

Méthode :

1. Trouver les coordonnées d'un point de la courbe autre que le sommet.	Ex :  La courbe passe par le point (4, 24)
2. Remplacer ce couple dans l'équation :	$f(x) = ax^2$ $24 = a \cdot 4^2$
3. Résoudre l'équation formée afin de déterminer la valeur du paramètre a :	$\frac{24}{4^2} = a$ $\frac{24}{16} = a$ $1{,}5 = a$
4. Écrire la règle de la fonction obtenue :	$f(x) = 1{,}5x^2$
5. Valider la solution :	$24 = 1{,}5 \cdot 4^2$ $24 = 1{,}5 \cdot 16$ $24 = 24$

Exercices :

1. Trouve l'équation de la fonction associée à cette table des valeurs :

$$f(x) = ax^2$$
$$1{,}6 = a \cdot 2^2$$
$$1{,}6 = a \cdot 4$$
$$\frac{1{,}6}{4} = a$$
$$0{,}4 = a$$

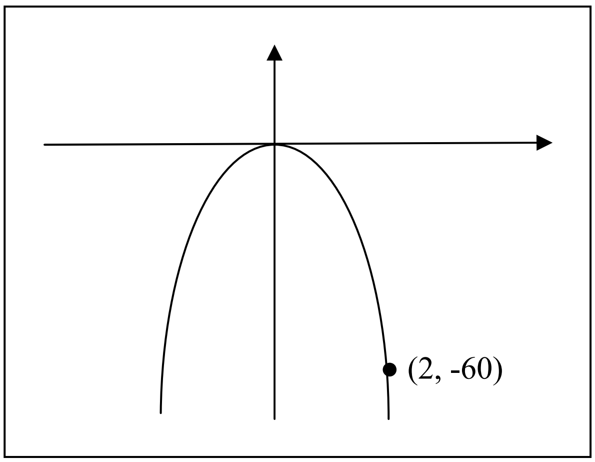
$$\frac{1{,}6}{2^2} = 0{,}4$$
$$\frac{6{,}4}{4^2} = 0{,}4$$
$$\frac{14{,}4}{6^2} = 0{,}4$$

x	f(x)
0	0
2	1,6
4	6,4
6	14,4

Réponse : $f(x) = 0{,}4x^2$

2. Détermine la règle associée à ces fonctions :

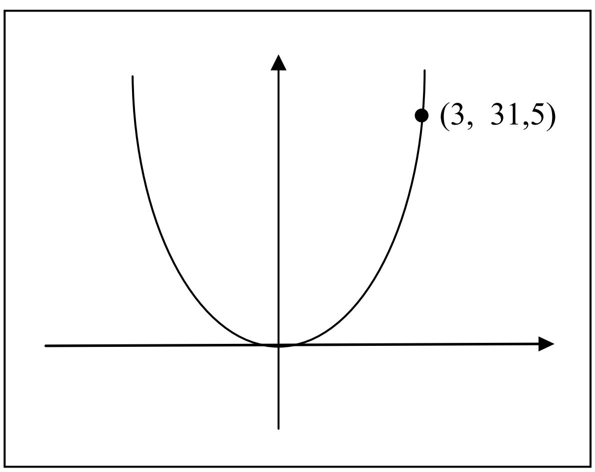
a)



$$\boldsymbol{f(x) = ax^2}$$
$$-60 = a \cdot 2^2$$
$$-60 = a \cdot 4$$
$$\frac{-60}{4} = a$$
$$-15 = a$$

Réponse : $f(x) = -15x^2$

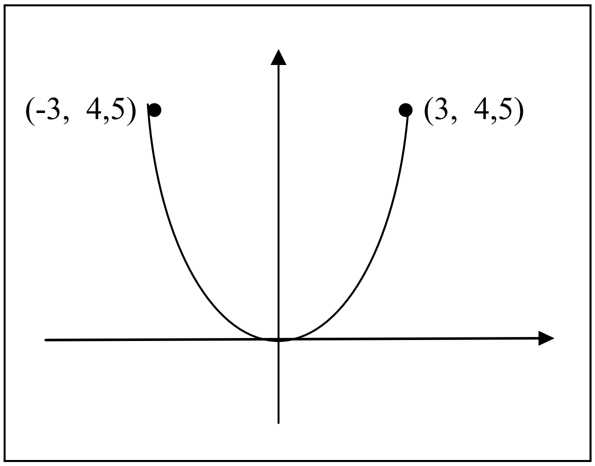
b)



$$\boldsymbol{f(x) = ax^2}$$
$$31{,}5 = a \cdot 3^2$$
$$31{,}5 = a \cdot 9$$
$$\frac{31{,}5}{9} = a$$
$$3{,}5 = a$$

Réponse : $f(x) = 3{,}5x^2$

c)



$$\boldsymbol{f(x) = ax^2}$$

$$4{,}5 = a \cdot 3^2$$

$$4{,}5 = a \cdot 9$$

$$\frac{4{,}5}{9} = a$$

$$\frac{1}{2} = a$$

Réponse : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

d) **Fonction exponentielle**

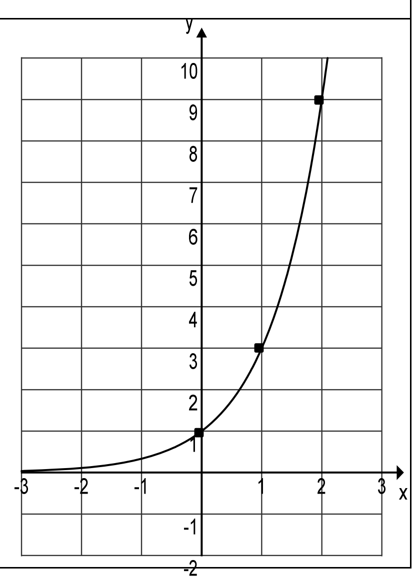
de la forme : $f(x) = ab^x$ où $a \neq 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$

a est la valeur initiale

Particularités :

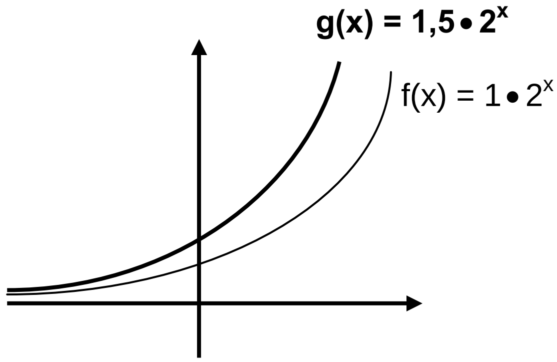
- lorsque les x de la table de valeurs augmentent de 1, chacun des y est lié au suivant par un même facteur multiplicatif correspondant au « b » de l'équation;
- la représentation graphique est une courbe passant par le point (0, a).
- La courbe ne passe pas par (0, 0).
- L'une des extrémités de la courbe se rapproche de plus en plus de l'axe des abscisses sans jamais y toucher. La courbe est asymptotique à l'axe des x.

Exemple :

<table>
<tr><th>Description verbale</th><th>Règle</th><th>Table de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr>
<td>Lorsque les x augmentent de 1, les valeurs des y s'obtiennent en multipliant le y précédent par 3</td>
<td>$f(x) = 3^x$</td>
<td>
<table>
<tr><th></th><th>x</th><th>f(x)</th><th></th></tr>
<tr><td></td><td>-3</td><td>$\frac{1}{27}$</td><td></td></tr>
<tr><td>+1</td><td>-2</td><td>$\frac{1}{9}$</td><td>×3</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>-1</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>×3</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>0</td><td>1</td><td>×3</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>1</td><td>3</td><td>×3</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>2</td><td>9</td><td>×3</td></tr>
<tr><td>+1</td><td>3</td><td>27</td><td>×3</td></tr>
</table>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

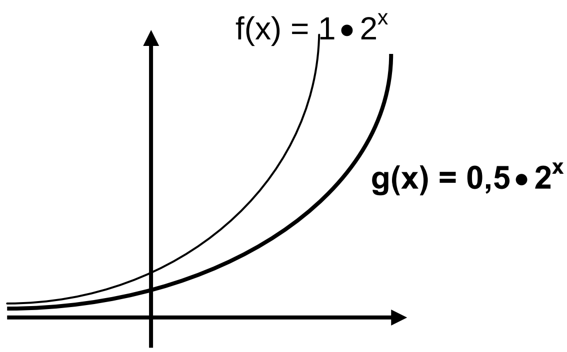
b = 3

La variation du paramètre a **occasionne :**

- 

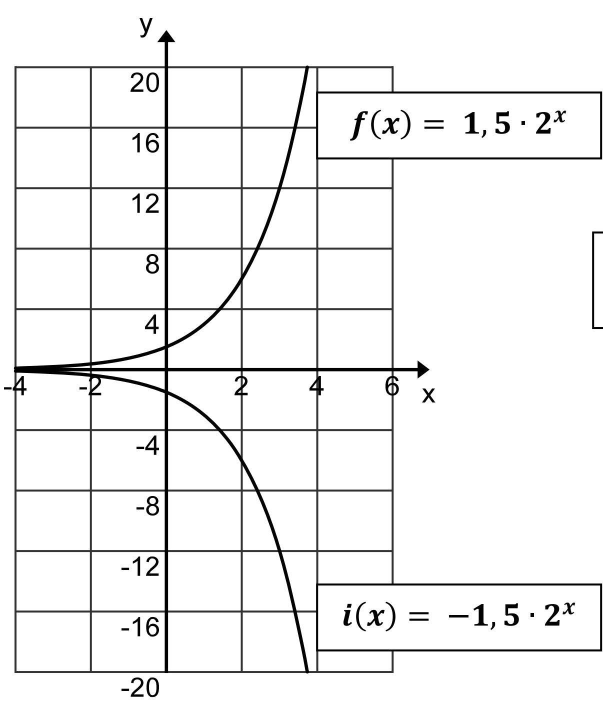
a > 1 : étirement vertical
la courbe monte plus vite.

plus « a » s'éloigne de 1, plus la courbe est étirée verticalement

- 

0<**a** < **1 :contraction verticale**
la courbe monte moins vite.

plus « a » se rapproche de 0, plus la courbe est contractée verticalement

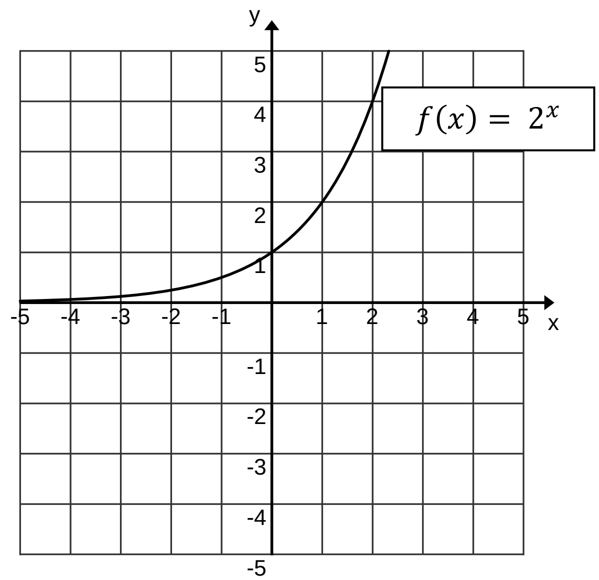
- 

a < 0 : réflexion selon l'axe des x

La **<u>variation du paramètre b</u>** occasionne un changement de croissance de la fonction :

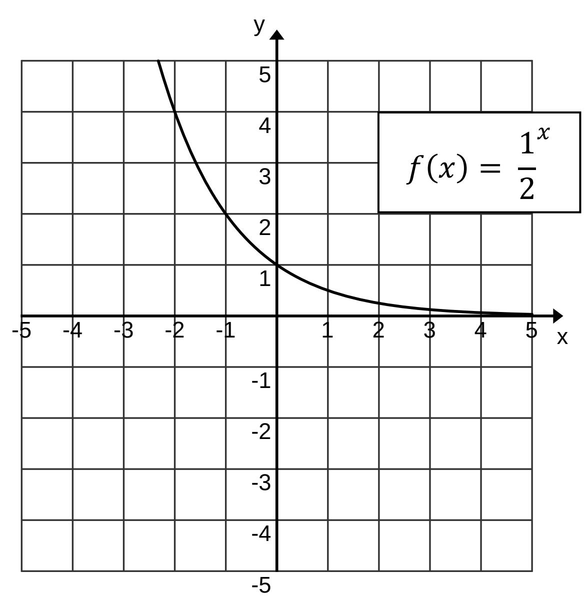
Lorsque **b** > **1,** la courbe **monte**, lorsque les x augmentent.

La fonction est **croissante.**



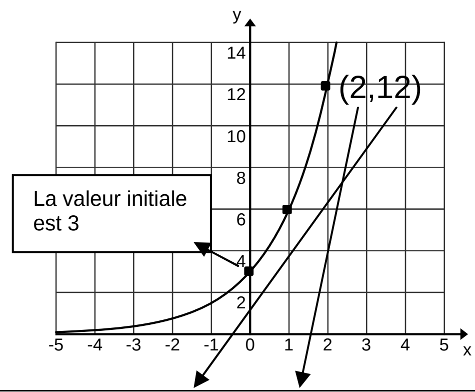
Lorsque 0 < b < 1**, la courbe** descend**, lorsque les x augmentent.**

La fonction est **décroissante.**



Recherche de la règle d'une fonction exponentielle

Méthode :

1. Trouver la valeur initiale et substituer cette valeur dans au paramètre $\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{f(x) = ab^x}$ $\boldsymbol{f(x) = 3b^x}$	
2. Substituer un couple dans l'équation :	$\boldsymbol{f(x) = 3b^x}$ $12 = \boldsymbol{3b^2}$
3. Isoler la variable $\boldsymbol{b}$ qui correspond à la base de la fonction exponentielle :	$\boldsymbol{\frac{12}{3} = \frac{3b^2}{3}}$ $\boldsymbol{4 = b^2}$ $\boldsymbol{\sqrt{4} = \sqrt{b^2}}$ $\boldsymbol{2 = b}$
4. Écrire la règle de la fonction obtenue :	$\boldsymbol{f(x) = 3(2)^x}$
5. Valider la solution :	couple (1, 6) $\quad \boldsymbol{6 = 3(2)^1}$ $\boldsymbol{6 = 6}$ vrai couple (2, 12) $\quad \boldsymbol{12 = 3(2)^2}$ $\boldsymbol{12 = 3 \cdot 4}$ $\boldsymbol{12 = 12}$ vrai

Mots clés : La variable y **<u>triple</u>** (**b = 3**) ou **<u>double</u>** (**b =** 2) ou **<u>diminue de moitié</u>** (**b = ½**) à toutes les heures ou à toutes les années ou …

La variable y **augmente** ou **diminue d'un certain pourcentage** par rapport à l'année précédente ou au mois précédent ou …

Si **augmentation de 30%** **b = 1 <u>+ 0,30</u> = 1,30**

Si **diminution de 40%** **b = 1 <u>– 0,40</u> = 0,60**

CALCULATRICE À AFFICHAGE GRAPHIQUE ET FONCTION EXPONENTIELLE

- **Étape 1**

  Mettre en fonction la calculatrice en appuyant sur le bouton $\boxed{\text{ON}}$.

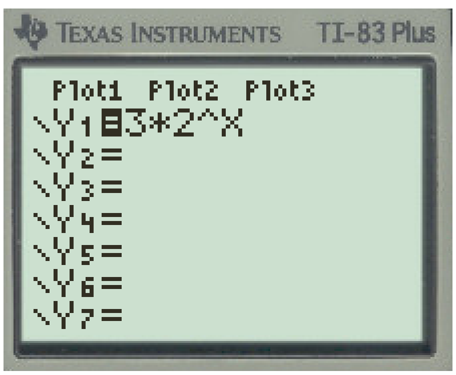
- **Étape 2**

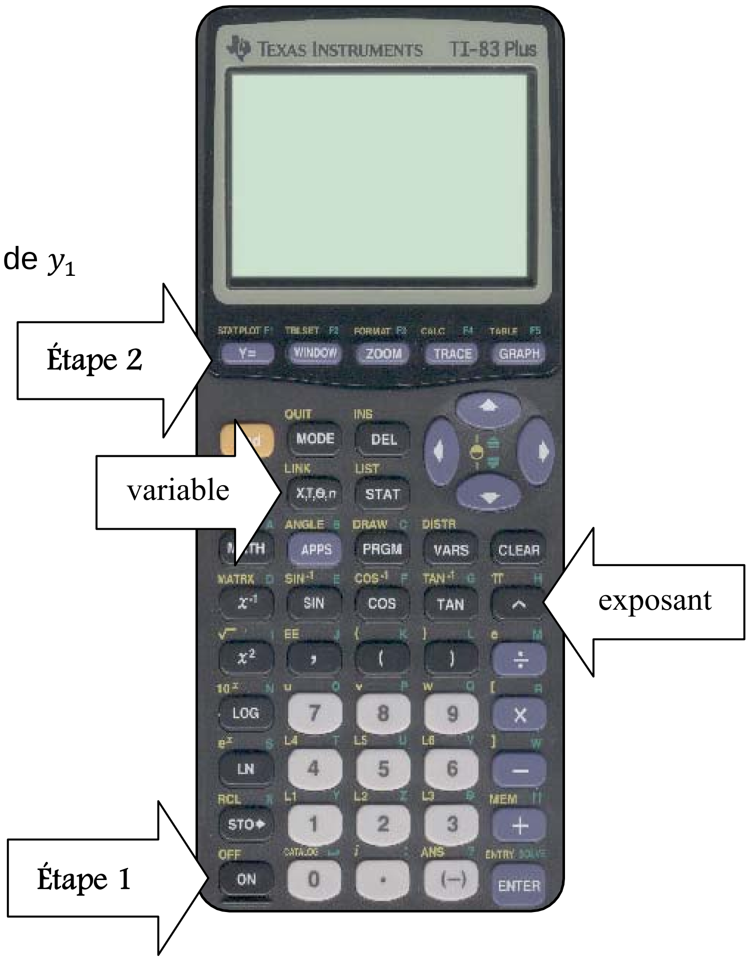
  Appuyer sur la touche $\boxed{\text{Y =}}$

- **Étape 3**

  Écrire votre fonction exponentielle à côté de y_1

  Exemple :

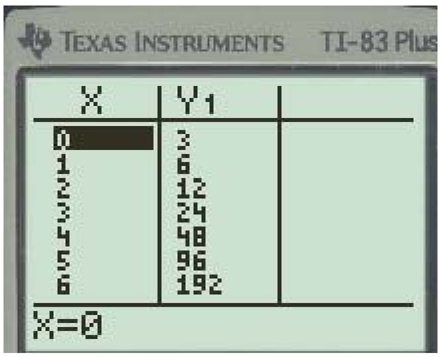


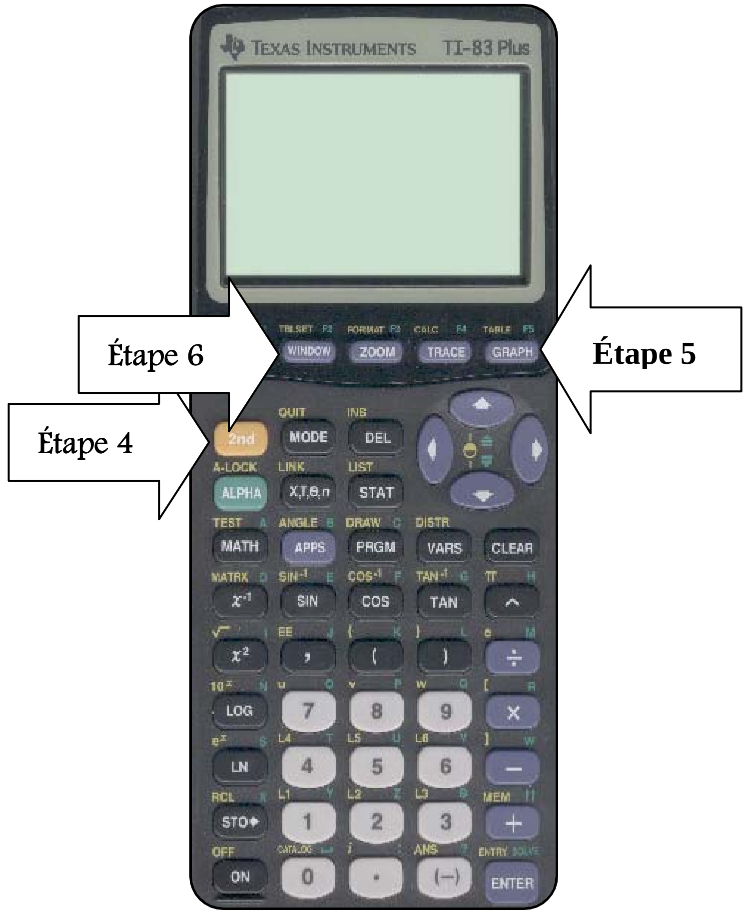


➢ Étape 4 et Étape 5

Pour avoir accès à la table des valeurs de cette fonction : appuyer sur la touche 2nd et ensuite sur la touche

table
graph

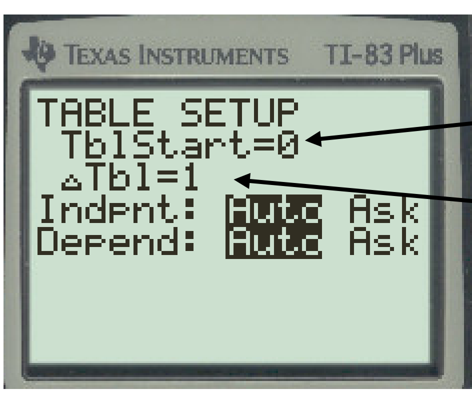




➢ Étape 4 et Étape 6

Pour avoir accès aux valeurs de la variable x dans la table des valeurs : appuyer sur la touche 2nd et ensuite sur la touche

Table set
window

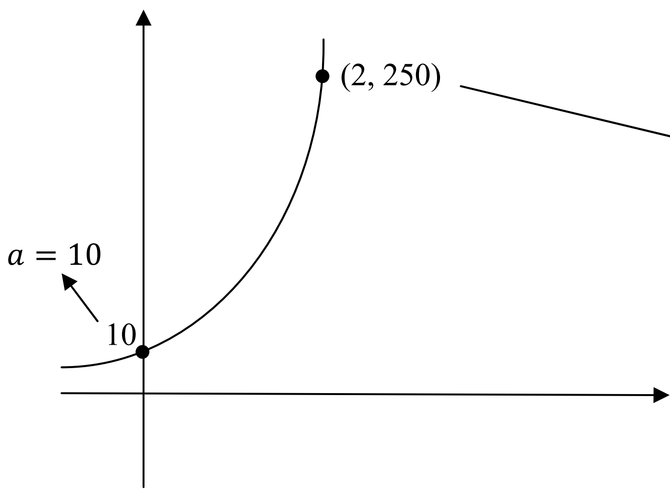


La valeur du 1er x dans la table de valeurs. Nous pouvons la modifier.

Indique de combien les x avancent, ici il avance par 1. Nous pouvons modifier cette valeur.

Exercices :

1. Détermine la règle associée à cette fonction.



$$f(x) = ab^x$$

$$f(x) = 10b^x$$

$$250 = 10b^2$$

$$\frac{250}{10} = b^2$$

$$25 = b^2$$

$$\sqrt{25} = b$$

$$5 = b$$

Réponse : $f(x) = 10 \cdot 5^x$

2. Trouve la règle de ces fonctions exponentielles et répond à la question :

a) Dans une substance, le nombre de bactéries triple toutes les heures. Au début, il y en avait 7. Combien y aura-t-il de bactéries après 8 heures ?

x	y
0	7
1	21
2	63
3	189

$a = 7$

$\times 3$

$\times 3$

$\times 3$

$b = 3$

$$f(x) = 7 \cdot 3^x$$

$$f(8) = 7 \cdot 3^8$$

$$f(8) = 7 \cdot 6\,561$$

$$f(8) = 45\,927$$

45 927 bactéries

b) Maxime a économisé un montant de 5 000$ cette année. Il décide de prendre un placement à intérêt composé. Le rendement de ce placement est de 3% par année.
Combien aura-t-il d'argent dans 10 ans ?

a = 5 000

b= 1 + 0,03 = 1,03

$f(x) = 5\,000 \cdot 1{,}03^{x}$

$f(x) = 5\,000 \cdot 1{,}03^{10}$

$f(x) = 5\,000 \cdot 1{,}34$

$f(x) = 6\,719{,}58$

6 719,58 $

c) Marie-Ève achète une voiture au coût de 23 000$. Cette auto se déprécie de 15% par année par rapport à ce qu'elle valait l'année précédente. Après combien d'années, vaudra-t-elle moins que la moitié de sa valeur initiale ?

a = 23 000

b= 1 - 0,15 = 0,85

$f(x) = 23\,000 \cdot 0{,}85^{x}$

x	y
0	23 000
4	12 006
	11 500
5	10 205

La moitié de sa valeur initiale.

Après 5 ans

d) Si un placement de 30 000$ est réduit de 5% par année. Comment vaudra-t-il dans 10 ans ?

a = 30 000

b= 1 - 0,05 = 0,95

$f(x) = 30\,000 \cdot 0{,}95^{x}$

$f(x) = 30\,000 \cdot 0{,}95^{10}$

$f(x) = 30\,000 \cdot 0{,}598\,736\,9..$

$f(x) = 17\,962{,}11$

17 962,11 $

e) Si un placement de 30 000$ augmente de 5% par année, comment vaudra-t-il dans 10 ans ?

a = 30 000

b= 1 + 0,05 = 1,05

$f(x) = 30\,000 \cdot 1{,}05^{x}$

$f(x) = 30\,000 \cdot 1{,}05^{10}$

$f(x) = 48\,866{,}84$

48 866,84 $

f) Ton oncle a une ferme. Il t'offre de travailler pour lui, si tu acceptes ton salaire sera le suivant :

- 0,01$ pour la première journée,
- le lendemain il doublera ton salaire de la journée précédente. Tu auras 0,02$,
- la 3$^{\text{ème}}$ journée, il doublera le salaire de la journée précédente. Tu auras 0,04$ et ainsi de suite.

Quel sera ton salaire la 20$^{\text{ème}}$ journée ?

a = 0,01

b= 2

	x	$f(x) = 0{,}01 \cdot 2^{x}$
1$^{\text{ère}}$ journée	0	0,01
2$^{\text{ème}}$ journée	1	0,02
3$^{\text{ème}}$ journée	2	0,04
4$^{\text{ème}}$ journée	3	0,08
…		
…		
20$^{\text{ème}}$ journée	19	5 242,88

5 242,88 $

g) Le nombre de bactéries de type A triple à toutes les heures dans une solution aqueuse. Combien y aura-t-il de bactéries trois heures plus tard si au départ il y avait 1000 bactéries ?

a = 1 000

b= 3

$f(x) = 1\,000 \cdot 3^{x}$

$f(x) = 1\,000 \cdot 3^{3}$

$f(x) = 1\,000 \cdot 27$

$f(x) = 27\,000$

27 000,00 $

h) Un placement de 1000$ augmente de 5% à chaque année. On s'intéresse à la valeur de ce placement selon les années écoulées. Quelle sera la valeur de ce placement dans 20 ans ?

a = 1 000

b= 1 + 0,05 = 1,05

$f(x) = 1\,000 \cdot 1{,}05^x$

$f(x) = 1\,000 \cdot 1{,}05^{20}$

$f(x) = 2\,653{,}30$

2 653,30 $

i) On laisse tomber une balle de golf à une hauteur de 2m du sol. La hauteur du bond atteint les ¾ de la hauteur précédente à chaque bond. Quelle est la règle de la fonction qui représente la hauteur de la balle en fonction du nombre de bonds ?

a = 2

b= $\frac{3}{4}$

$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$

$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$

j) Une école compte 1 900 élèves. Comme il y a une baisse démographique dans cette ville, le nombre d'élèves diminuera de 5% à chaque année pour les 5 prochaines années. Combien y aura-t-il d'élèves dans 5 ans ?

a = 1 900

b= 1 - 0,05 = 0,95

$f(x) = 1\,900 \cdot 0{,}95^x$

$f(x) = 1\,900 \cdot 0{,}95^5$

$f(x) = 1470$

1 470 élèves

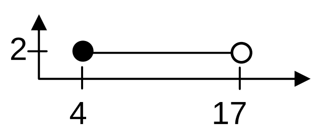
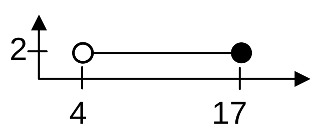
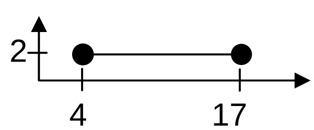
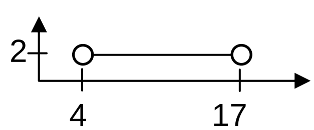
e) **Fonction en escalier**

Une fonction en escalier est une fonction constante sur certains intervalles et qui varie subitement à certaines valeurs de la variable indépendante, appelées «valeurs critiques».

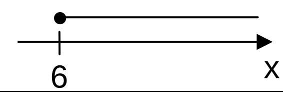
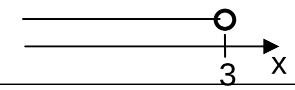
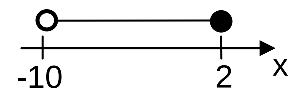
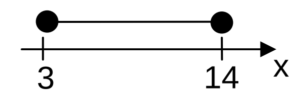
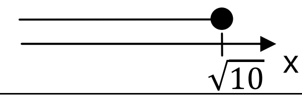
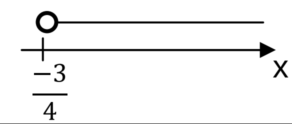
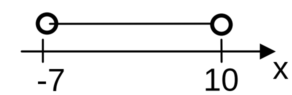
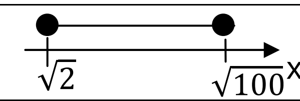
x	f(x)
[0, 4[	2
[4, 8[	4
[8, 12[	6
[12, 16[	8

Valeurs critiques

La représentation graphique de cette fonction est constituée de segments horizontaux. Aux extrémités de chaque segment, un point plein ou vide est utilisé pour désigner un couple de valeurs qui appartient ou non à la fonction.

<table>
<tr><th>Table des valeurs</th><th>Représentation graphique</th><th>Couples qui appartiennent ou non à la fonction</th></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>[4, 17[</td><td>2</td></tr></table></td><td>
</td><td>(4, 2) : appartient à la fonction
(17, 2) : n’appartient pas à la fonction</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>] 4, 17]</td><td>2</td></tr></table></td><td>
</td><td>(4, 2) : n’appartient pas à la fonction
(17, 2) : appartient à la fonction</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>[4, 17]</td><td>2</td></tr></table></td><td>
</td><td>(4, 2) : appartient à la fonction
(17, 2) : appartient à la fonction</td></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>]4, 17[</td><td>2</td></tr></table></td><td>
</td><td>(4, 2) : n’appartient pas à la fonction
(17, 2) : n’appartient pas à la fonction</td></tr>
</table>

Complète le tableau suivant :

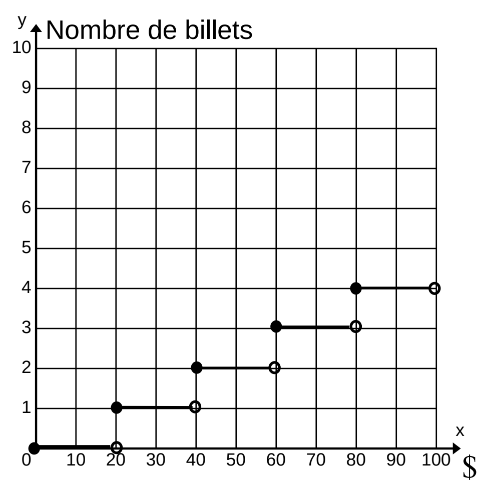
Domaine de la fonction **en mots**	Domaine de la fonction **en intervalle**	Représentation sur **la droite** du domaine de la fonction
Supérieurs ou égaux à 6	$x \in [\ 6,\ \infty\ [$	
Inférieurs à 3	$x \in\ ]-\infty, 3[$	
supérieurs à –10 et inférieurs ou égaux à 2	$x \in\ ]\ \text{-}10,\ 2\ ]$	
supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 14	$x \in [\ 3\ ,\ 14]$	
Inférieurs ou égaux à $\sqrt{10}$	$x \in\ ]\ \text{-}\infty\ ,\sqrt{10}\ ]$	
supérieurs à $\frac{-3}{4}$	$x \in \left]\frac{-3}{4}, \infty\right[$	
Inférieurs à 10 et supérieurs à -7	$x \in\ ]-7, 10[$	
Le minimum est $\sqrt{2}$ et le maximum est $\sqrt{100}$	$x \in [\ \sqrt{2}\ ,\ \sqrt{100}]$	

Mots clés : Le y varie **par tranche de** x.

Exemple :
Dans le cadre d'une campagne de financement pour un club de Hockey, on remet aux donateurs un coupon de tirage pour chaque tranche de 20$ complète.

Voici la table de valeurs et le graphique qui représente cette situation :

x	y
$[0, 20[$	0
$[20,40[$	1
$[40,60[$	2
$[60,80[$	3
$[80,100[$	4



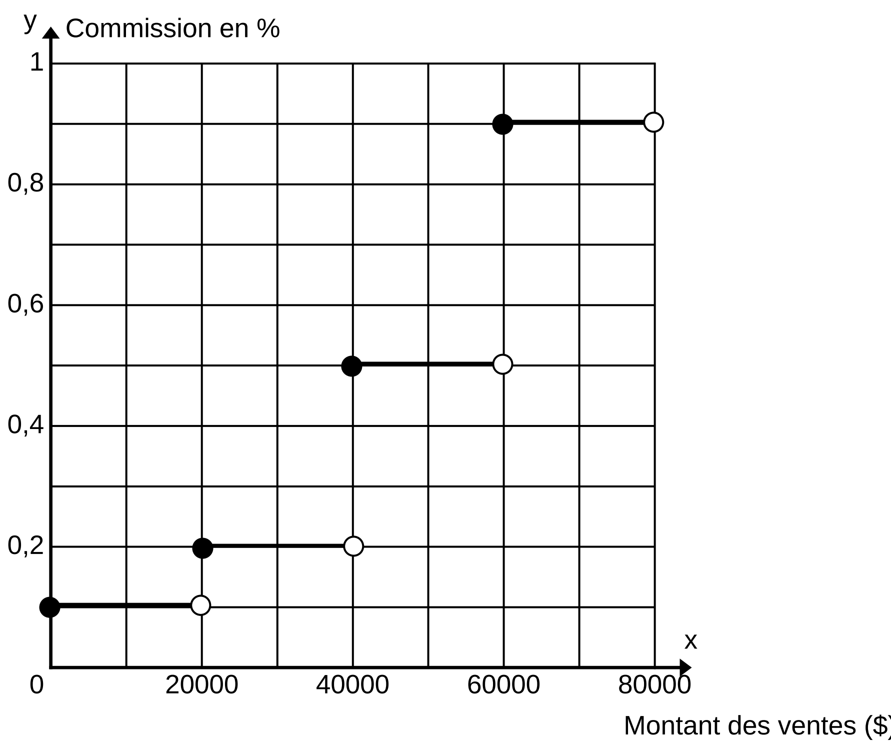
Exercices :

1. Une vendeuse de voiture reçoit un salaire hebdomadaire de 350$ auquel s'ajoute une commission. La tableau ci-dessous illustre la façon de calculer cette commission.

Montant des ventes ($)	Commission (% du montant des ventes)
$[0, 20\ 000[$	0,10
$[20\ 000, 40\ 000[$	0,20
$[40\ 000, 60\ 000[$	0,50
$[60\ 000, 80\ 000[$	0.90

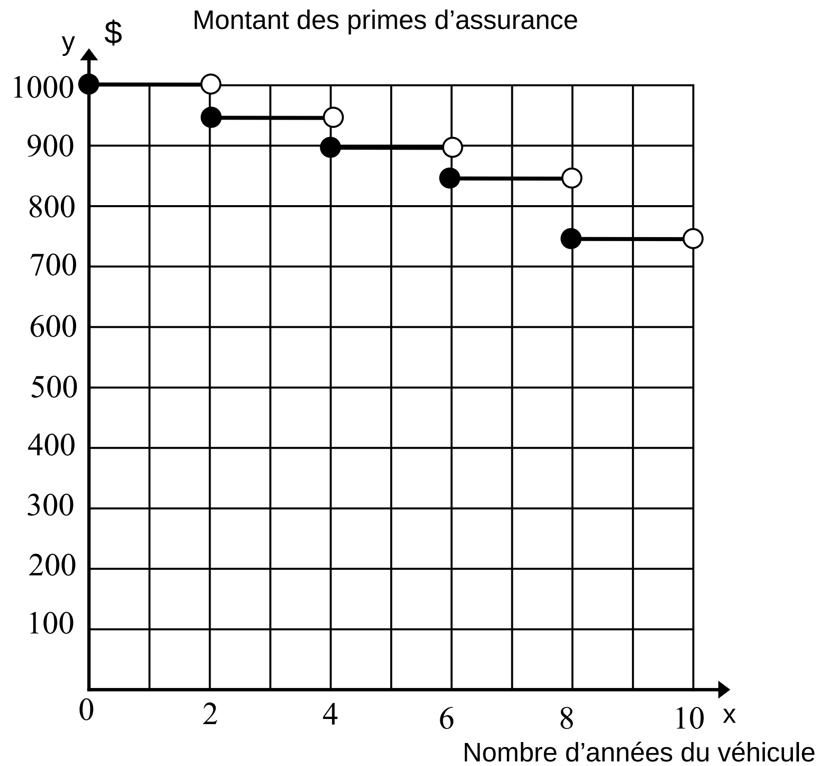
Complète le graphique qui représente cette situation :

Commission

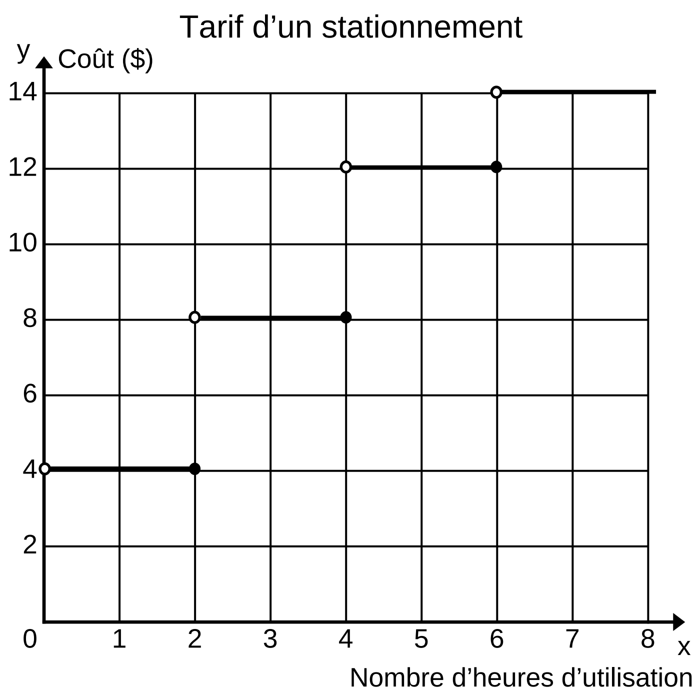


2. Une compagnie d'assurance nous dévoile ses primes d'assurance pour un homme agé entre 16 et 22 ans. Les primes varient selon l'âge du véhicule. Complète le graphique qui représente cette situation.

Âge du véhicule (en années)	Coût ($)
$[0, 2[$	**1 000**
$[2, 4[$	**950**
$[4, 6[$	**900**
$[6, 8[$	**850**
$[8, 10[$	**750**



3. Voici la représentation graphique du coût d'un stationnement en fonction du nombre d'heures d'utilisation. Complète la table des valeurs qui représente cette situation.



Tarif d'un stationnement

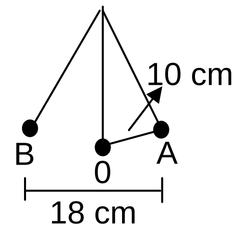
Nombre d'heures d'utilisation	$
$]0, 2]$	4
$]2, 4]$	8
$]4, 6]$	12
$]6, \infty[$	14

f) Fonction périodique

La représentation graphique d'une fonction périodique est constituée d'un motif qui se répète.

Période de la fonction : L'écart entre les abscisses situées au début et à la fin de ce motif .

Mouvement du balancier d'une horloge

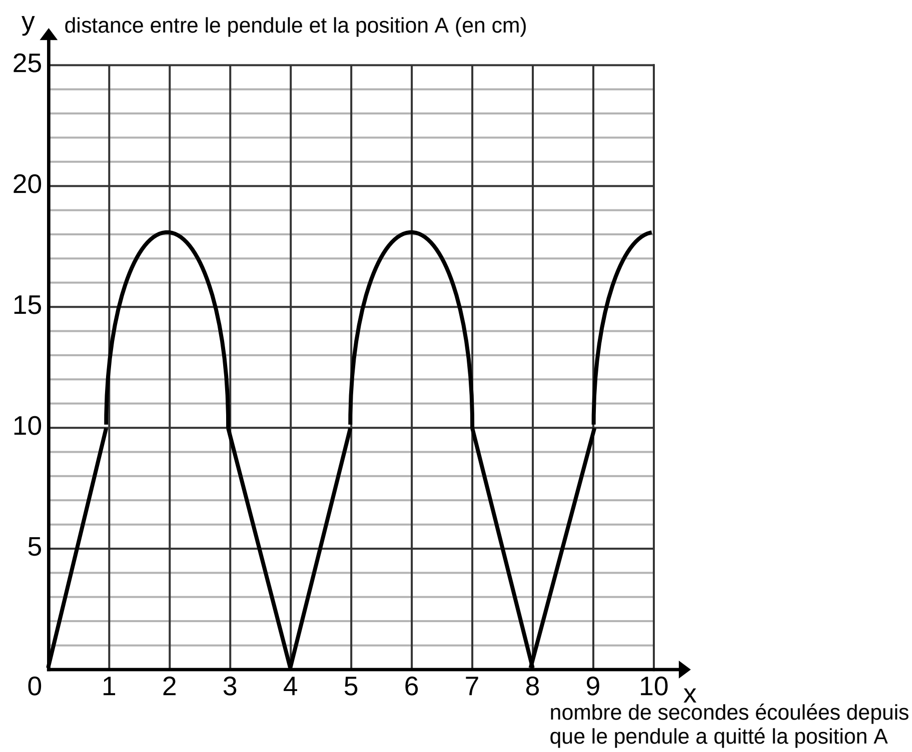


Au départ (t = 0) le balancier est à la position A. On observe qu'il faut 4 secondes pour faire un aller-retour.

Le balancier décrit périodiquement la même trajectoire.

Le temps nécessaire pour atteindre de nouveau pour la première fois le point A, c'est-à-dire la durée d'un cycle, est appelé **période** du mouvement.

Dans cette situation, la période est de 4 secondes.



Quelle sera la distance entre le pendule et la position A après :

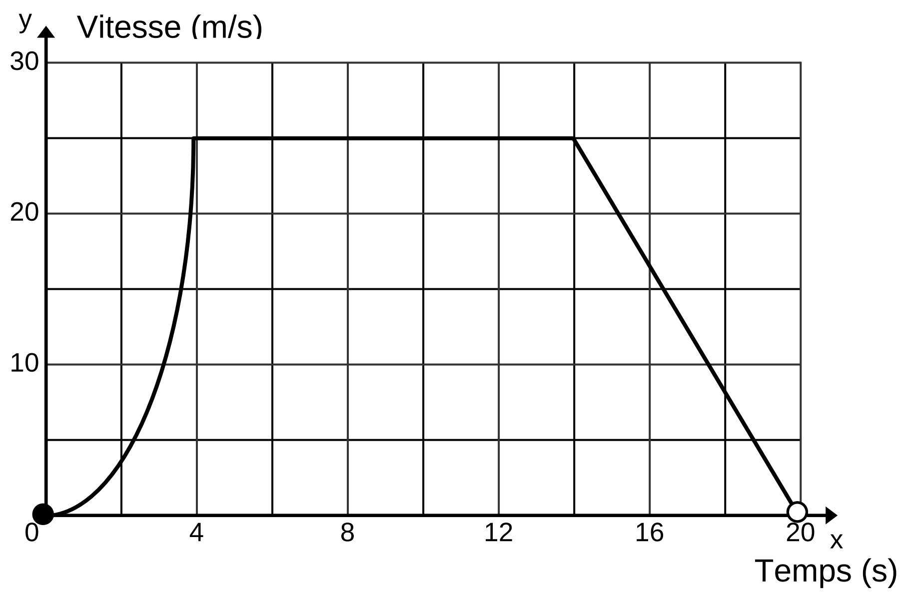
3 secondes : 10 cm , 4 secondes : 0 cm
6 secondes : 18 cm , 9 secondes : 10 cm

g) Fonction définie par parties

Pour des intervalles du domaine correspondent différents types de fonctions.

La vitesse d'une moto qui accélère de plus en plus pendant 4 secondes, maintient sa vitesse pendant 10 secondes, puis ralentit de façon constante pendant 6 secondes, peut être modélisée par une fonction par parties.

Voici la représentation graphique de cette situation :



Complète ces tableaux :

Intervalle	**Type de fonction**
$[0, 4[$	Fonction quadratique (polynomiale de degré 2)
$[4, 14[$	Fonction constante (polynomiale de degré 0)
$[14, 20[$	Fonction affine (polynomiale de degré 1)

Intervalle	**Équation de la fonction**
$[0, 4[$	$y = \frac{25}{16} x^2$
$[4, 14[$	$y = 25$
$[14, 20[$	$y = \frac{-25}{6} x + \frac{500}{6}$