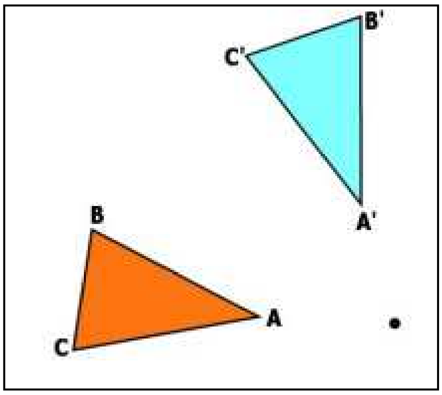
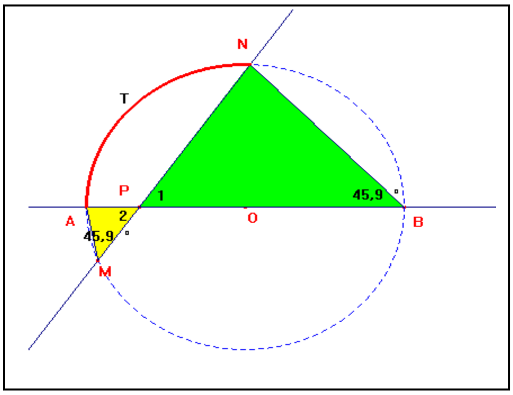
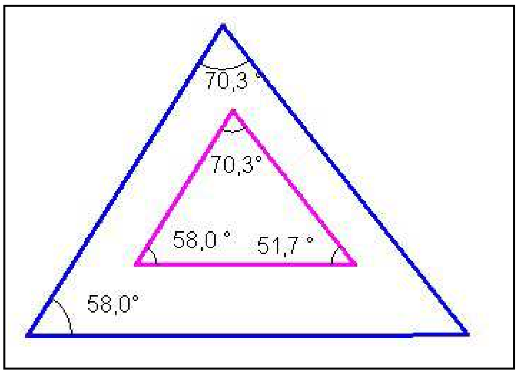
Mathématique
4ème secondaire

séquence :
Culture, société et technique

Figures isométriques et semblables







nom : ____

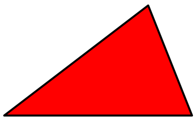
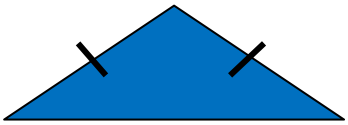
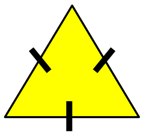
groupe : ______

Quelques situations d'application s'inspirent des prototypes publiés par le MELS en 2009 et en 2010.

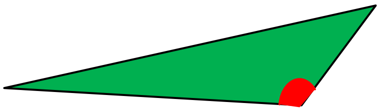
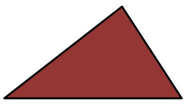
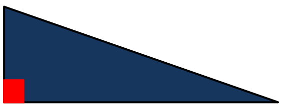
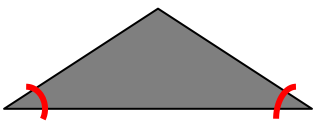
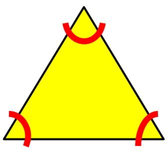
Commission scolaire du Chemin-du-Roy

1. Classification des triangles

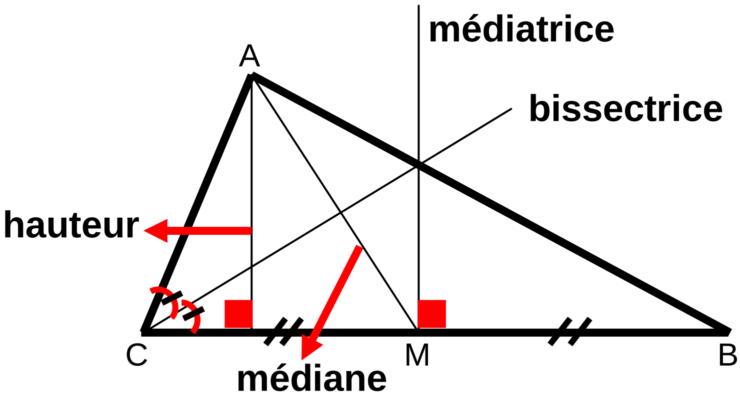
➢ **Selon les côtés :**

Illustration	Particularité	Nom
	**Aucun côté isométrique**	**Scalène**
	**Deux côtés isométriques**	**Isocèle**
	**Trois côtés isométriques**	**Équilatéral**

➢ **Selon les angles :**

Illustration	Particularité	Nom
	**Un angle obtus**	**Obtusangle**
	**Trois angles aigus**	**Acutangle**
	**Un angle droit**	**Rectangle**
	**Deux angles isométriques**	**Isoangle**
	**Trois angles isométriques**	**Équiangle**

Les lignes remarquables dans un triangle



Définition :

<u>Bissectrice</u> : demi-droite qui partage un angle en deux angles congrus.

<u>Médiane</u> : segment qui joint un sommet du triangle au milieu du côté opposé.

<u>Médiatrice</u> : perpendiculaire élevée sur le milieu du côté d'un triangle.

<u>Hauteur</u> : perpendiculaire abaissée d'un sommet sur le côté opposé ou sur son prolongement.

2. Propriétés des quadrilatères

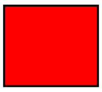
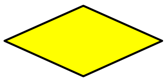
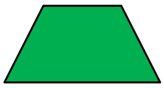
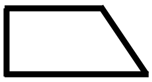
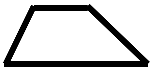
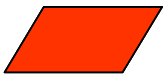
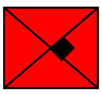
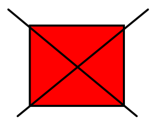
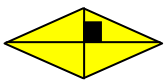
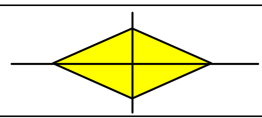
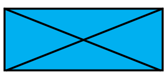
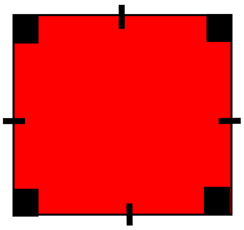
Illustration	Nom	Côtés	Angles
	Carré	• côtés opposés parallèles • 4 côtés isométriques	• 4 angles droits
	Losange	• côtés opposés parallèles • 4 côtés isométriques	• Angles opposés isométriques • Angles consécutifs supplémentaires
	Rectangle	• côtés opposés parallèles • côtés opposés isométriques	• 4 angles droits
	Trapèze isocèle	• une paire de côtés opposés parallèles • 2 côtés isométriques	• 2 paires d'angles isométriques
	Trapèze rectangle	• une paire de côtés opposés parallèles	• 2 angles droits
	Trapèze	• une paire de côtés opposés parallèles	
	Parallélogramme	• côtés opposés parallèles • côtés opposés isométriques	• Angles opposés isométriques • Angles consécutifs supplémentaires

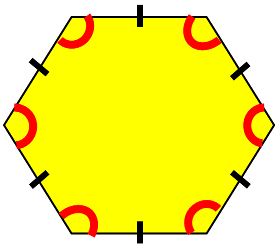
Illustration	Nom	Diagonales	Axe(s) de symétrie
	Carré	• isométriques • perpendiculaires • se coupent en leur milieu	
	Losange	• perpendiculaires • se coupent en leur milieu	
	Rectangle	• se coupent en leur milieu	

Polygones réguliers

Un polygone est régulier si tous ses côtés sont isométriques et tous ses angles sont isométriques :

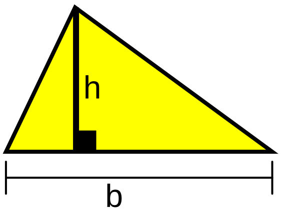
Ex :





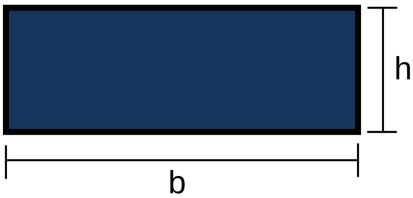
4. Aire des figures

Triangle :



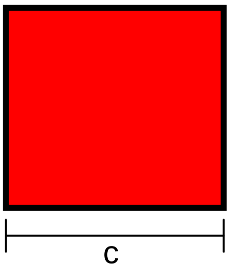
$$A_{triangle} = \frac{b \times h}{2}$$

Rectangle :



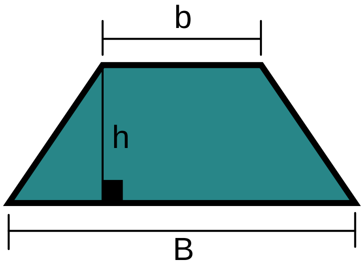
$$A_{rectangle} = b \times h$$

Carré :



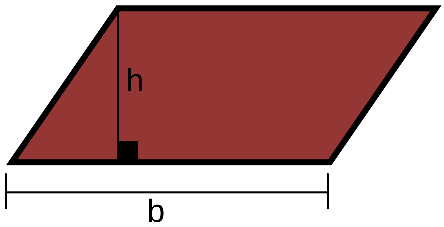
$$A_{carré} = c^2$$

Trapèze :



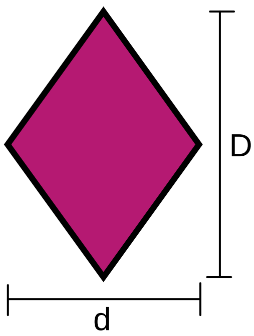
$$A_{trapèze} = \frac{(B+b)\times h}{2}$$

Parallélogramme :



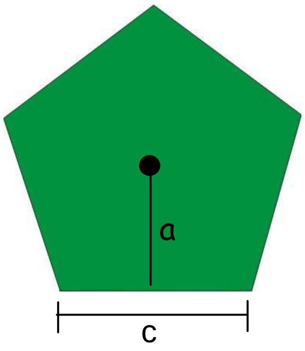
$$A_{parallélogramme} = b \times h$$

Losange :



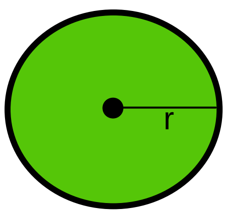
$$A_{losange} = \frac{D\times d}{2}$$

Polygone régulier :



$$A_{polygone\ réguliere} = \frac{c\times a\times n}{2}$$

Disque :

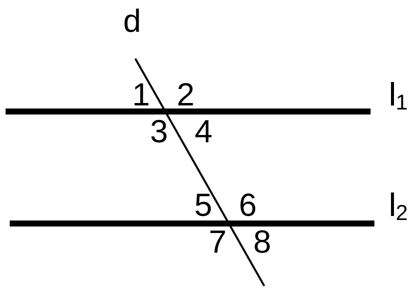


$$A_{disque} = \pi r^2$$

5. Énoncés mathématiques :

Énoncé 1 :

Lorsqu'une sécante coupe deux droites parallèles :



- les angles alternes-internes sont isométriques :

____

____

- les angles alternes-externes sont isométriques :

____

____

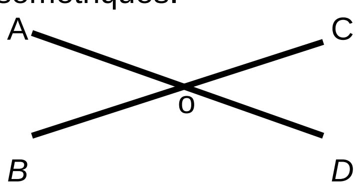
- les angles correspondants sont isométriques :

____

____

Énoncé 2 :

Si des angles sont opposés par le sommet, alors ils sont isométriques.



____

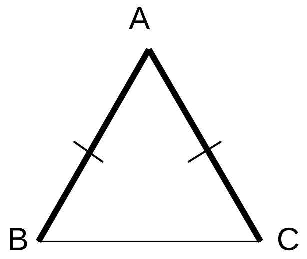
____

Énoncé 3 :

Si un triangle est isocèle, alors les angles opposés aux côtés isométriques sont isométriques.

____

____



Énoncé 4 :

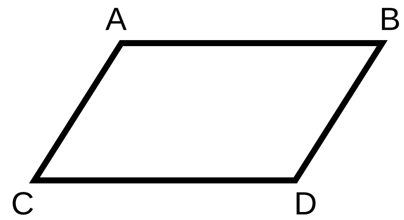
Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont isométriques et ses angles opposés sont isométriques.

____

____

____

____

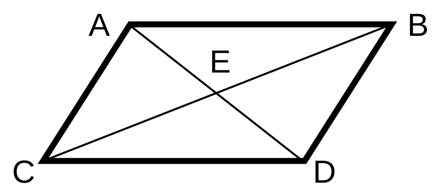


Énoncé 5 :

Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

____

____

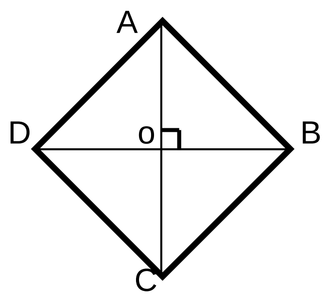


Énoncé 6 :

Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires.

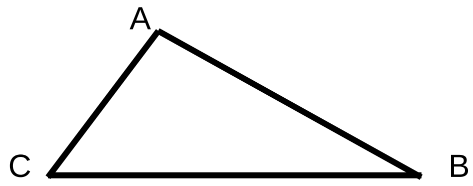
____

____



Énoncé 7 :

La somme des angles intérieurs d'un triangle est de 180°.

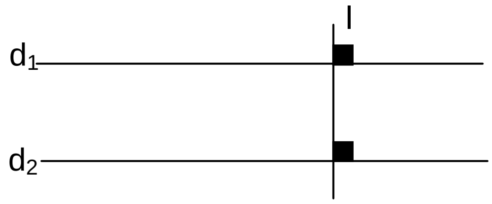


____

____

Énoncé 8 :

Deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

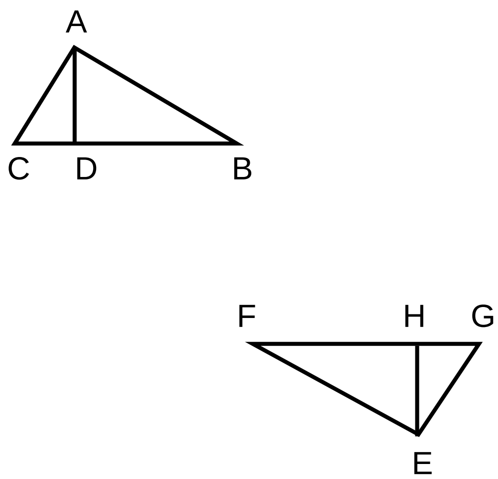


Hypothèse : ______________________

Conclusion: ______________________

Énoncé 9 :

Si des figures sont isométriques alors les éléments homologues sont isométriques.



Hypothèse : ______________________

*Conclusion:*______________________

____

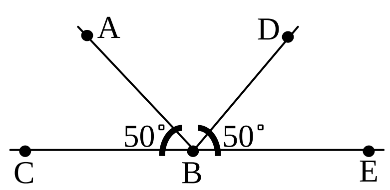
____

____

____

Énoncé 10 :

Deux quantités égales à une même troisième quantité sont égales entre-elles.
→ Transitivité



Hypothèse : ______________________

____

Conclusion : ______________________

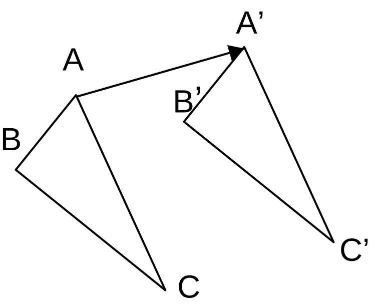
6. Isométries

Les translations, les rotations et les réflexions sont des transformations géométriques, appelées **isométries**, qui préservent la mesure des angles et des segments.

Les translations et les rotations de 180° ont de plus la propriété d'appliquer toute droite sur une droite qui lui est parallèle.

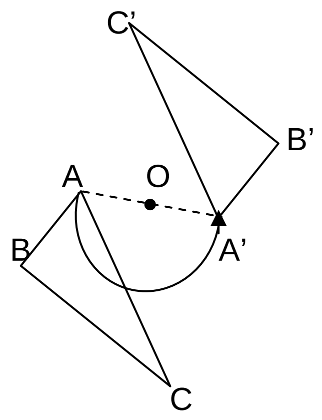
Ex :

1) Translation de A vers A'



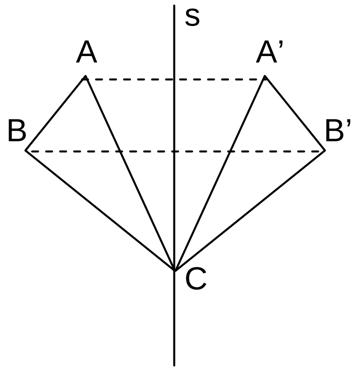
BC // B'C'

2) Rotation de 180° autour du centre O



BC // B'C'

3) Réflexion selon l'axe de réflexion S



Les isométries engendrent des figures isométriques :

$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

s'il existe une ________________ ou une suite ________ ______________ qui applique le triangle ABC sur le triangle A'B'C'.

Tous les _____________ et tous les ________________ homologues de ces figures ont la même mesure ou sont isométriques.

Éléments homologues : Suite à une transformation géométrique, ce sont les éléments qui se correspondent dans les 2 figures.

Symbole : **isométrique :** $\cong$

7. Raisonnement déductif

En géométrie, il existe divers types d'énoncés qui permettent de structurer un raisonnement déductif.

Conjucture : Énoncé considéré comme vrai mais qui n'a jamais été démontré.

Théorème : Une conjecture démontrée

Contre-exemple :
Un raisonnement logique qui permet d'établir des affirmations à partir de propriétés précédemment établies ou admises.

Démonstration :
Un raisonnement logique qui permet d'établir des affirmations à partir de propriétés précédemment établies ou admises.

Lors d'une démonstration, nous devons poser une ou des hypothèse(s) et une conclusion.

- Hypothèses : Ce sont les propriétés précédemment établies ou admises.

- Conclusion : C'est l'annonce de ce qu'il faut démontrer.

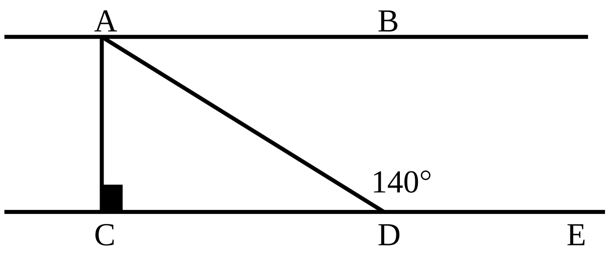
Nous devons également structurer notre preuve à partir d'affirmations. Chaque affirmation émise doit être justifiée.

- Affirmation : Ce sur quoi est basée la démonstration.

- Justification : Énoncé qui appuie l'affirmation.

Exemple :

Dans la figure ci-dessous, AB // CD et AC ⊥ CD. Démontre que la mesure de l'angle CAD égale à 50˚, sachant que la mesure de l'∠ADE = 140°.



Affirmation Justification

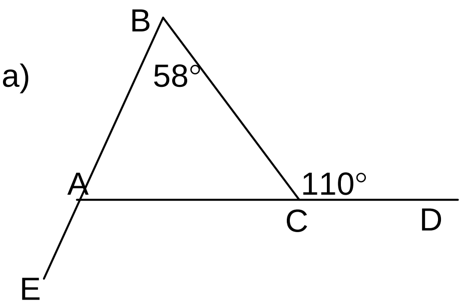
1. m ∠ CDA = ______ ____

2. m ∠ CAD = ______ ____

Exercice :

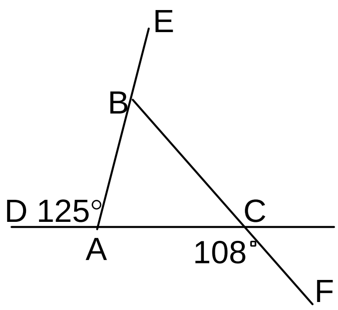
1. Trouve la mesure des angles selon la figure donnée :

a)



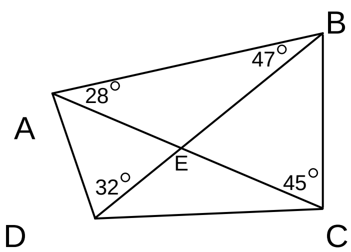
m ∠ EAC = ______

b)



m ∠ EBC = ______

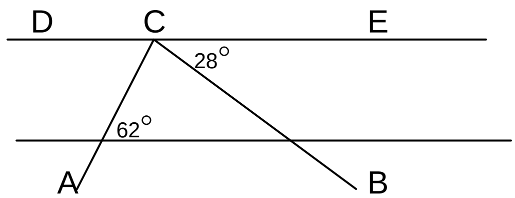
c)



m∠AEB=___, m∠AED=___, m∠BEC=___

m∠EBC=___, m∠DAE=___, m∠DEC=___

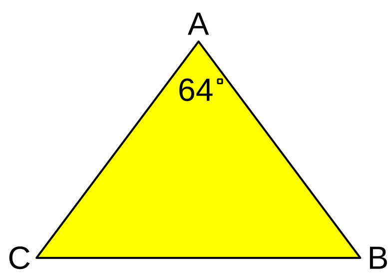
d) DE // AB



m∠ABC=___, m∠ACD=___

m∠ACB=___

2. L'angle compris entre les côtés isométriques d'un triangle isocèle mesure 64°. Quelle est la valeur de chacun des deux autres angles ?



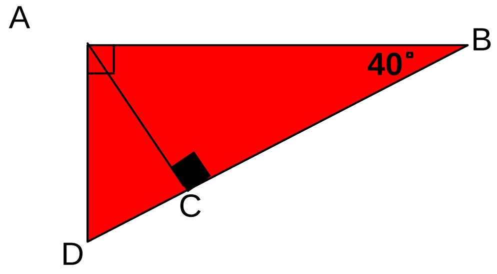
Réponse : ______°

3. Si ∠DAB et ∠ACB sont droits, trouve :

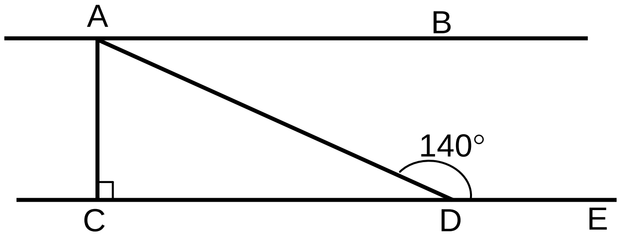
m∠ ADC = ______°

m ∠ CAB = ______°

m ∠ DAC = ______°



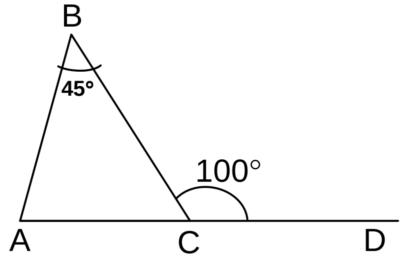
4. Dans la figure ci-dessous, AB // CD et AC ⊥ CD. On recherche la mesure de ∠ BAD sachant que m ∠ADE = 140°



Affirmations	Justifications
m ∠ CDA = ______	______________________________
m ∠ BAD = ______	______________________________

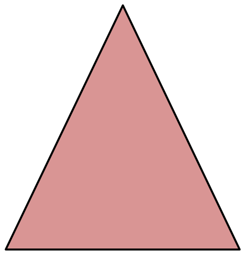
5. Dans la figure ci-dessous, l'angle B mesure 45° et l'angle BCD mesure 100°.

On veut déterminer la mesure de ∠ A.



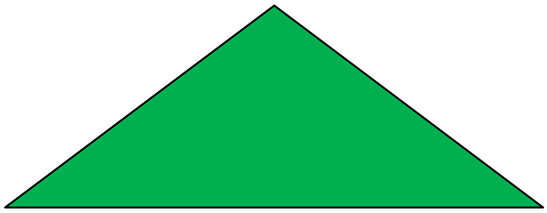
Affirmations	Justifications
m ∠ ACB = ______	______________________________
m ∠ A = ______	______________________________

6. Le périmètre d'un triangle isocèle mesure 68 cm et le côté compris entre les côtés isométriques mesure 20 cm. Quelle est la mesure de chacun des côtés isométriques ?



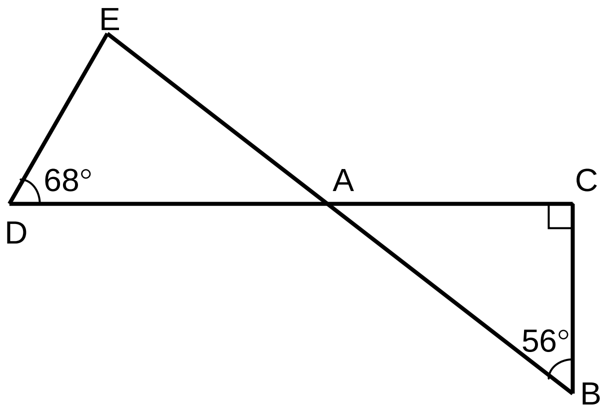
réponse :______ cm

7. Les côtés isométriques d'un triangle isocèle sont $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$. Quels sont les angles isométriques ?



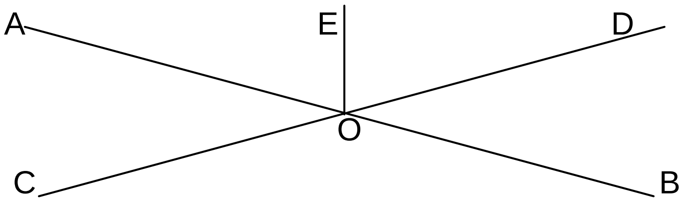
réponse : $\angle$___ et $\angle$___

8. Dans la figure ci-dessous, l'angle C est droit et la mesure de l'angle D est 68°. De plus $\overline{BE}$ et $\overline{CD}$ se coupe en A. Si la mesure de l'angle B est de 56°, quelle est la mesure de l'angle E ?



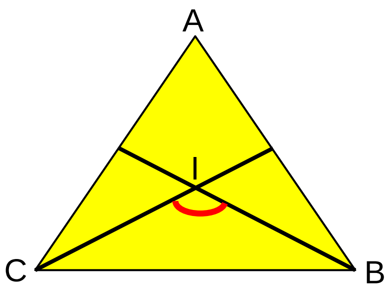
Affirmations	Justifications
________________	____
________________	____
________________	____

9. Dans cette figure, ∠AOC est opposé par le sommet à ∠ BOD et OE est la bissectrice de ∠ AOD. L'angle AOC mesure 50°. Trouve la mesure de ∠ EOB.



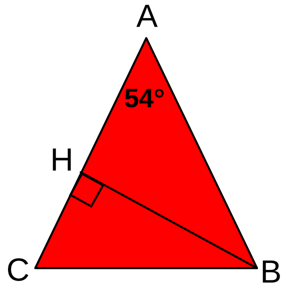
Affirmations	Justifications

10. ABC est un triangle équilatéral. Les bissectrices des angles B et C se coupent en un point I. Quelle est la mesure de ∠BIC ?



Affirmations	Justifications

11. ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. $\overline{BH}$ est la hauteur relative au côté $\overline{AC}$. Si m $\angle$A = 54°, détermine m $\angle$ HBC.



Affirmations | Justifications

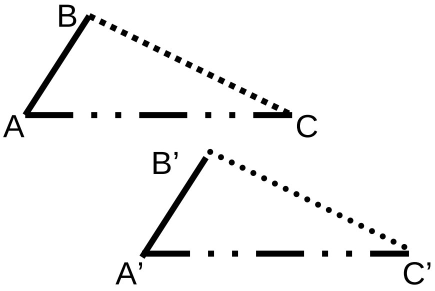
Affirmations	Justifications

Les triangles isométriques

Les énoncés 1, 2 et 3 présentent les **<u>conditions minimales</u>** pour avoir des triangles isométriques .

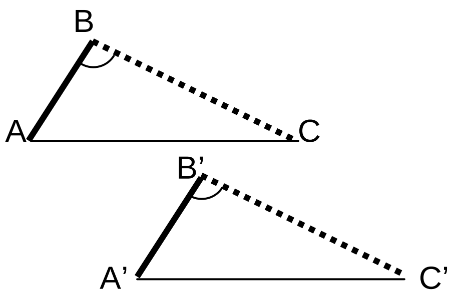
<u>Énoncé 1</u> :

Deux triangles qui ont tous leurs côtés homologues isométriques sont nécessairement isométriques. C-C-C



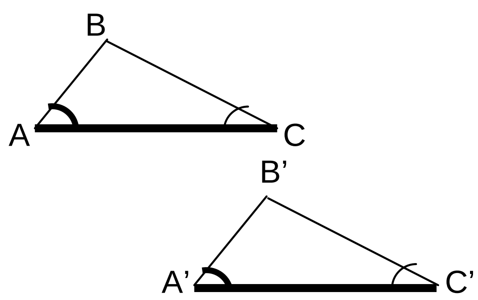
<u>Énoncé2</u> :

Deux triangles qui ont un angle isométrique compris entre des côtés homologues isométriques sont nécessairement isométriques. C-A-C

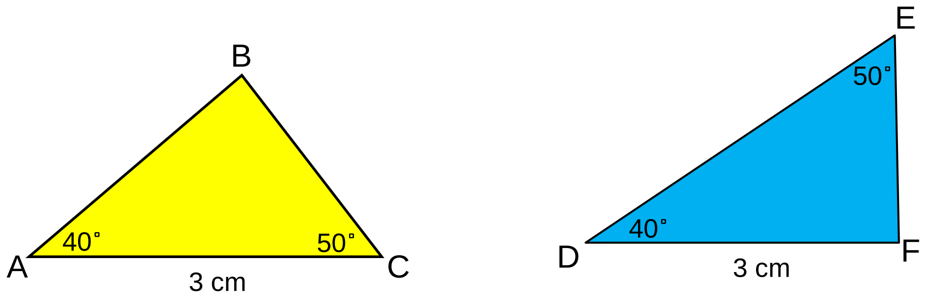


<u>Énoncé 3</u> :

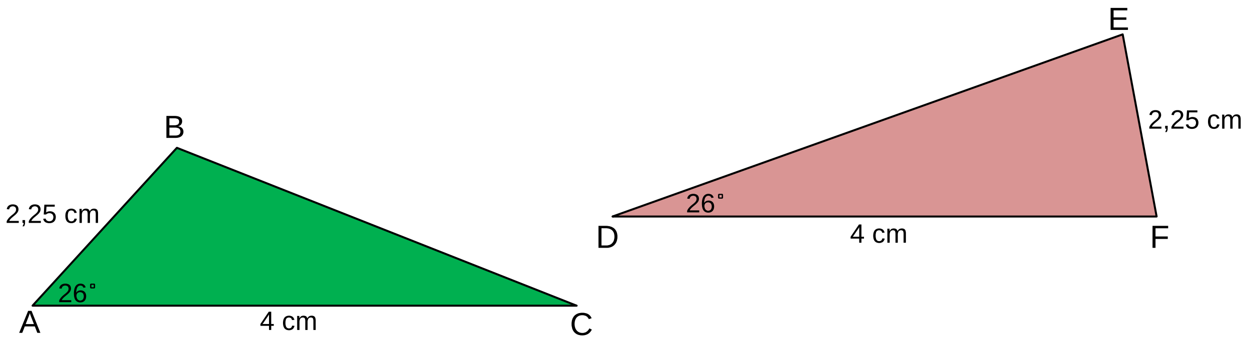
Deux triangles qui ont un côté isométrique compris entre des angles homologues isométriques sont nécessairement isométriques. A-C-A



Pourquoi que ces deux triangles ne sont pas isométriques?



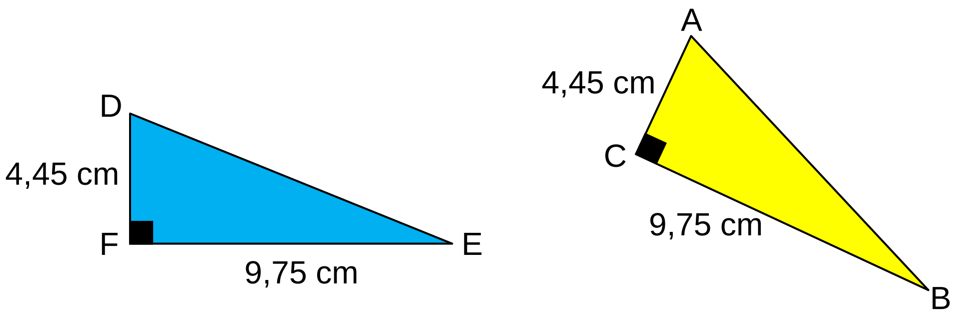
Pourquoi que ces deux triangles ne sont pas isométriques?



Exercices :

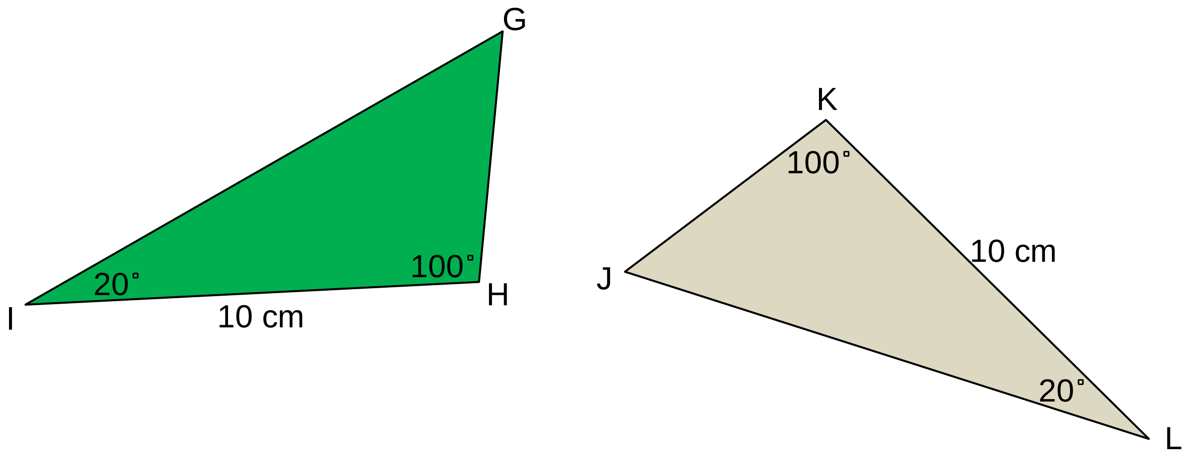
1. Quel énoncé géométrique permet d’affirmer que les deux triangles sont isométriques.

a)



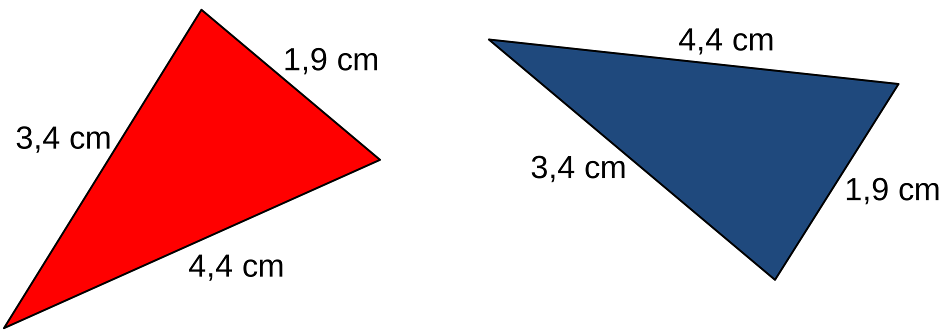
____

b)



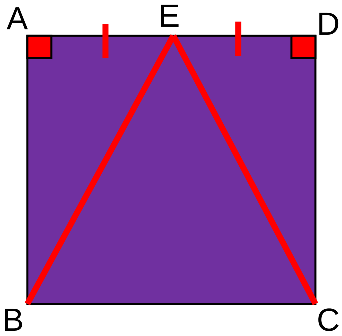
____

c)



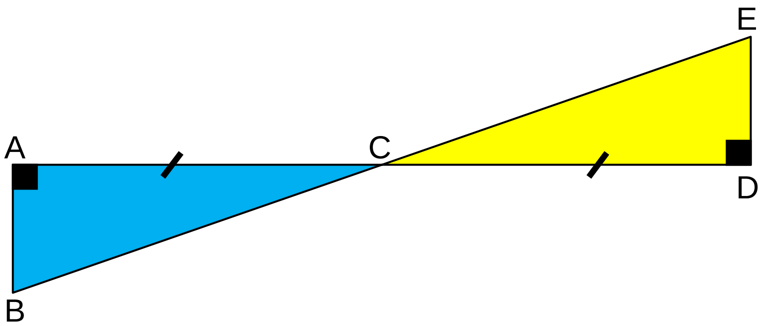
____

2. Dans le carré ci-dessous, nous avons relié le point milieu E du segment AD aux deux sommets B et C. Démontre que les triangles ABE et DCE sont isométriques.



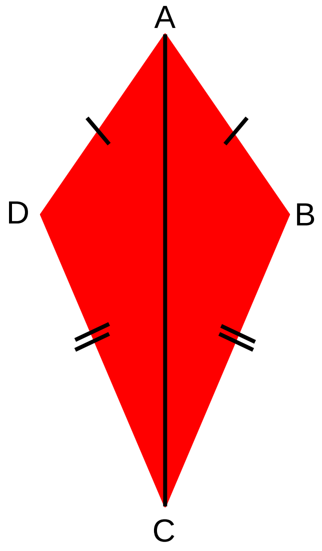
Affirmations	Justifications
1. __________	__________
2. __________	__________
3. __________	__________
4. __________	__________

3. Dans la figure ci-dessous, les segments AD et BE se croisent au point C. De plus C est au milieu de $\overline{AD}$. Montre que les triangles ABC et CDE sont isométriques.



Affirmations	Justifications
1. __________	__________
2. __________	__________
3. __________	__________
4. __________	__________

4. Sachant que dans un cerf-volant, les côtés adjacents sont isométriques deux à deux. Démontre que la diagonale AC du cerf-volant ABCD ci-dessous détermine deux triangles isométriques.



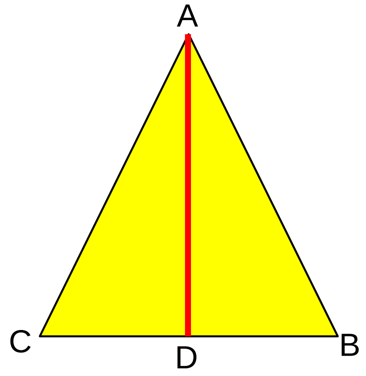
Affirmations	Justifications
1. ____________________	________________________________
2. ____________________	________________________________
3. ____________________	________________________________
4. ____________________	________________________________

5. Dans le triangle isocèle ABC (où les côtés $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont isométriques), $\overline{AD}$ est la bissectrice de l'angle CAB. Démontrer que les triangles ADC et ADB sont isométriques.

Hypothèses : ________________

____

Conclusion : ________________

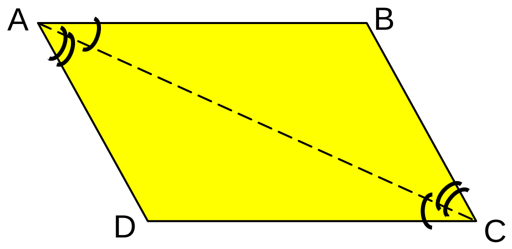


Affirmation	Justification
1. ________________________	____
2. ________________________	____
3. ________________________	____
4. ________________________	____

6. Démontre que les côtés opposés d'un parallélogramme sont isométriques.

Hypothèses : ____________________

____



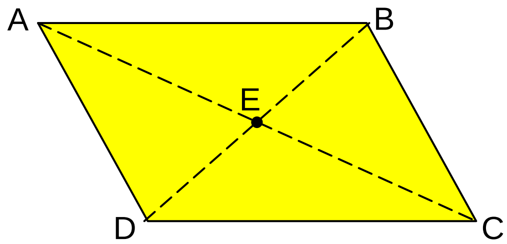
Conclusion : ____________________

____

Construction : On trace la diagonale AC du parallélogramme ABCD.

Affirmation	Justification
1. ______________________________	____
2. ______________________________	____
3. ______________________________	____
4. ______________________________	____
5. ______________________________	____
______________________________	

7. Démontre que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.



Hypothèses : ________________

Conclusion : ________________

____

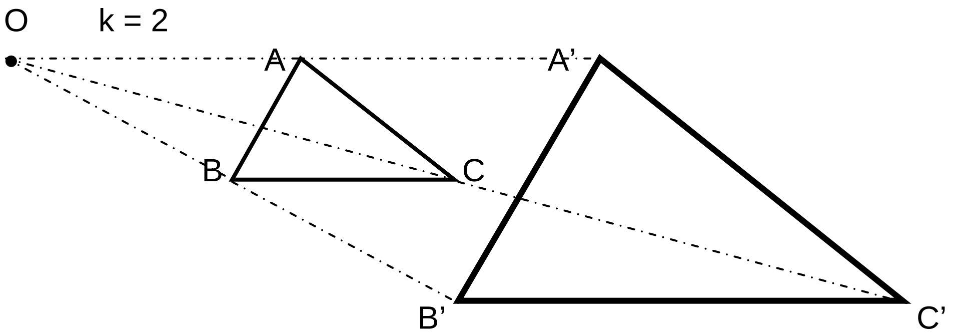
Construction : On trace la diagonale AC du parallélogramme ABCD.

Affirmation	Justification
1. ____________	____________
2. ____________	____________
3. ____________	____________
4. ____________	____________
5. ____________	____________
____________	

9. Homothétie

Une **homothétie** est une transformation géométrique définie par **son centre** et par **son rapport d'homothétie k**. Appliquée sur une figure, elle produit une image qui correspond à un agrandissement de la figure initiale (si k >1) ou à une réduction de celle-ci (si 0 < k < 1).

Ex : Une homothétie de centre O et dont la rapport d'homothétie est 2.



$$k = \frac{m\overline{OA'}}{m\overline{OA}}$$

ou

$$k = \frac{m\overline{A'B'}}{m\overline{AB}}$$

Les homothéties engendrent des figures semblables :

$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

s'il existe une ________________, une __________________ ou une suite d'_________________ ou d'_________________ qui applique le triangle ABC sur le triangle A'B'C'.

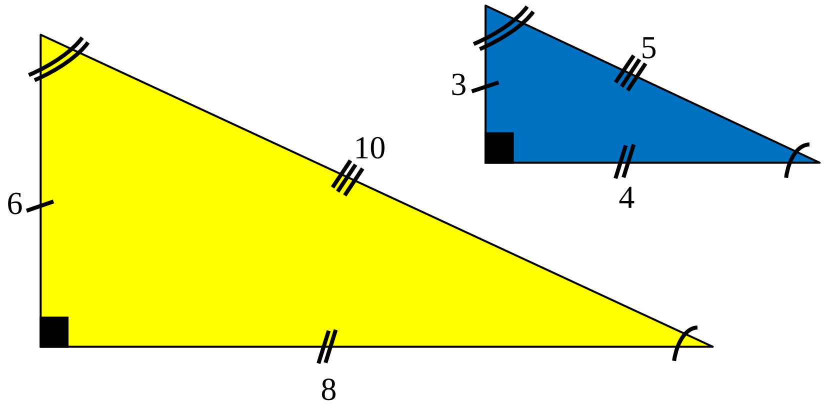
Tous les ______________ homologues sont isométriques et les ______________ homologues sont de longueurs _____________________.

10. Les triangles semblables

Dans des figures ou des solides semblables, les mesures des segments homologues (côtés, diagonales, hauteurs, médianes, médiatrices, apothèmes…) sont proportionnelles (rapport égal au rapport de similitude). Les angles sont isométriques.

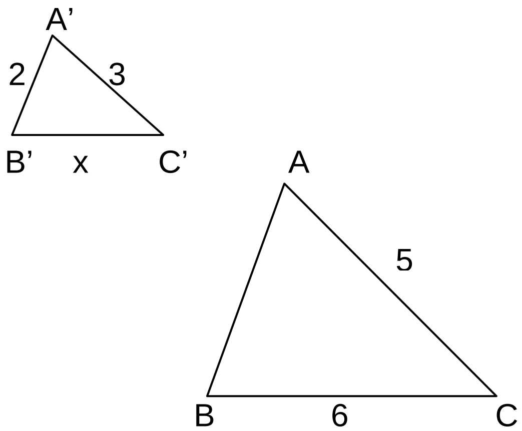
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

	/	//	///
$\frac{P}{G}$:	$\frac{3}{6}$ =	$\frac{4}{8}$ =	$\frac{5}{10}$



Dans des triangles semblables, les **côtés opposés aux angles isométriques** sont **homologues**.

Ex. : Comme ∆ABC ~ ∆A'B'C', nous pouvons trouver la mesure de $\overline{B'C'}$:



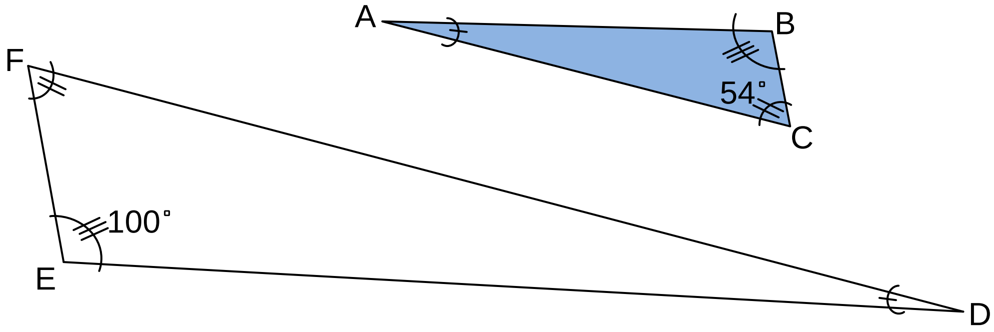
$\frac{P}{G}$: ____ = $\frac{m\overline{B'C'}}{}$

Réponse : $m\overline{B'C'}$ = _____

Exercices :

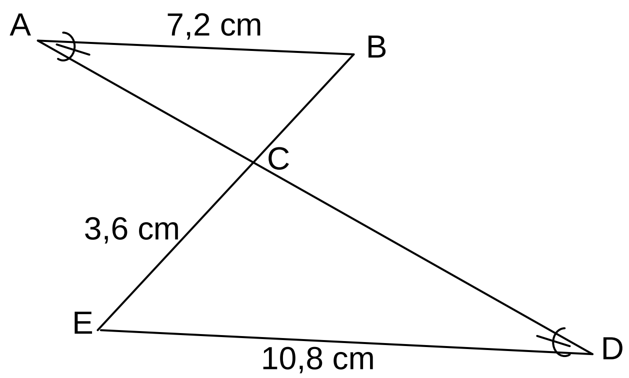
1. Chaque paire de triangles sont semblables, vous devez trouver :

   a) La mesure de l'angle A :



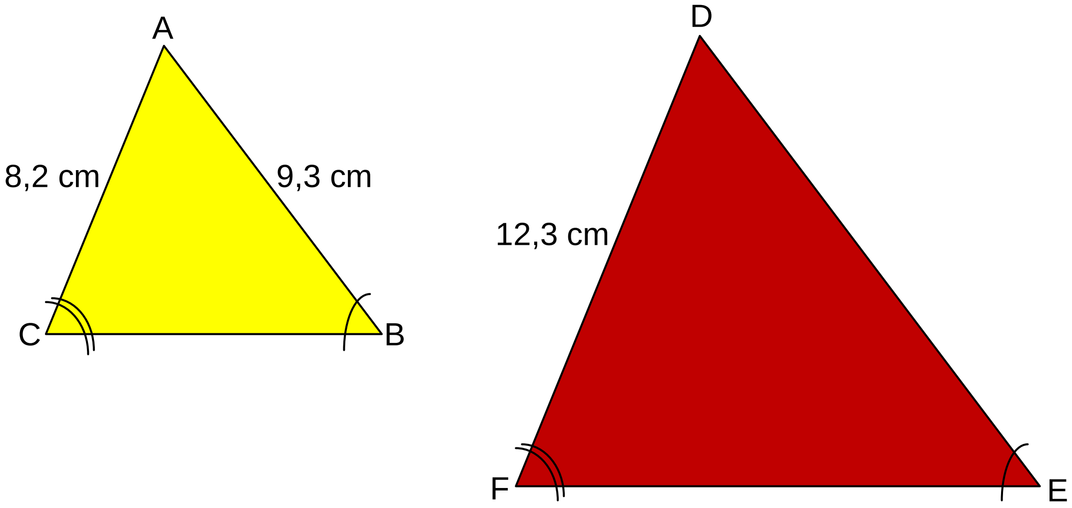
Réponse : ____________________

   b) La mesure de $\overline{BC}$:



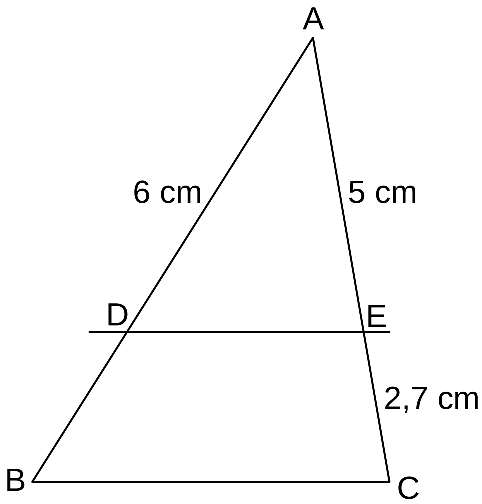
Réponse : ____________________

c) La mesure de $\overline{DE}$:



Réponse : ___________________

d) $Si\ \overline{DE}//\overline{BC}$, quelle est la mesure de $\overline{AB}$?

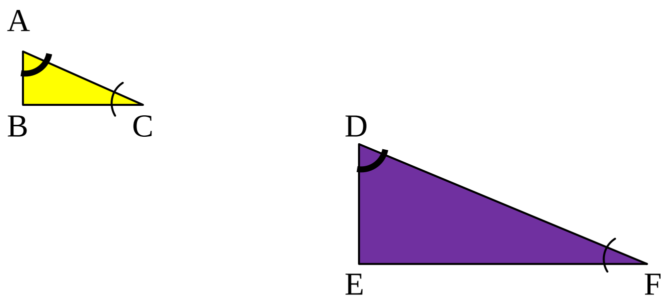


Réponse : __________________

Les énoncés 1, 2 et 3 sont les **conditions minimales** pour avoir des **triangles semblables** .

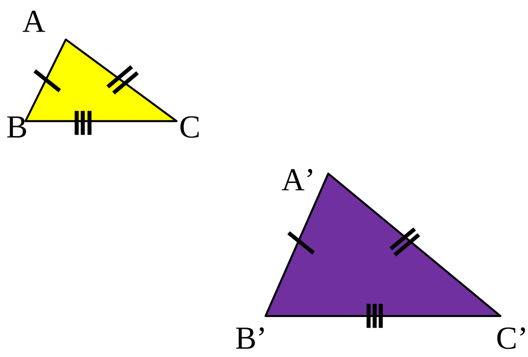
Énoncé 1 :

Deux triangles qui ont deux angles homologues isométriques sont semblables (A-A).



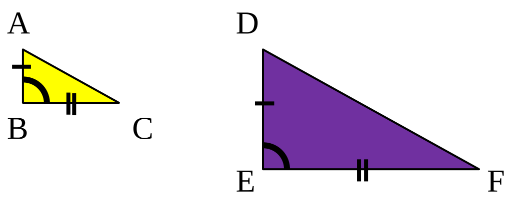
Énoncé 2 :

Deux triangles dont les mesures des côtés homologues sont proportionnelles sont semblables (C-C-C).



Énoncé 3 :

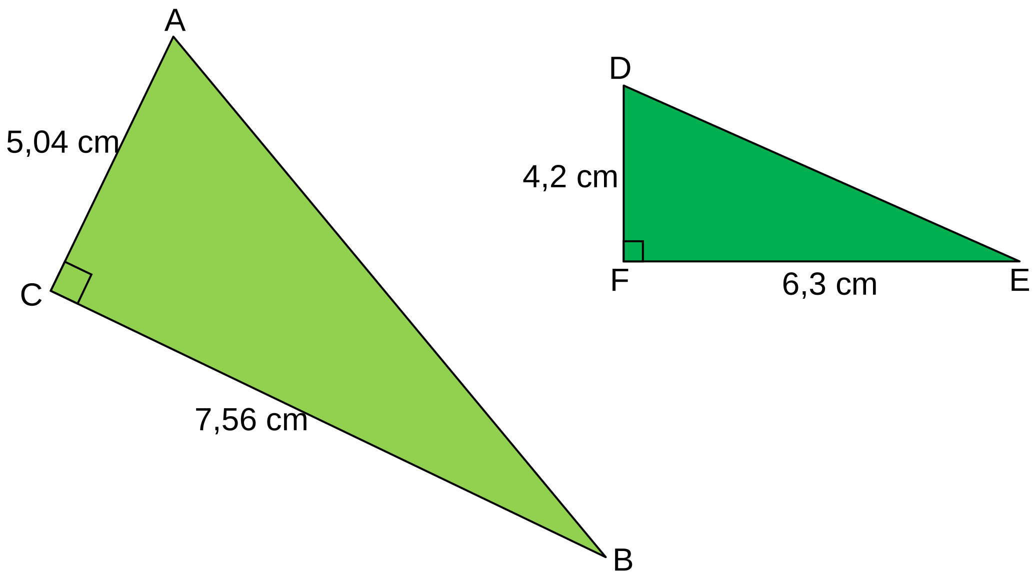
Deux triangles possédant un angle isométrique compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles sont semblables (C-A-C).



Exercices :

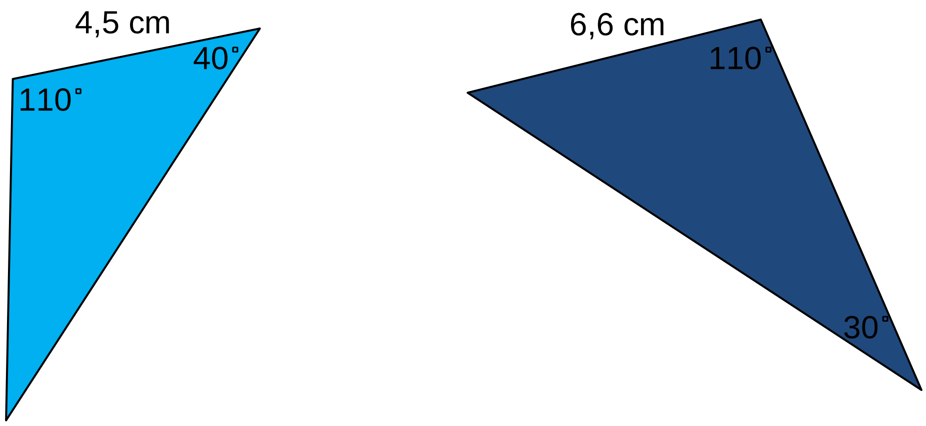
1. Quel énoncé permet d'affirmer que les deux triangles sont semblables?

a)



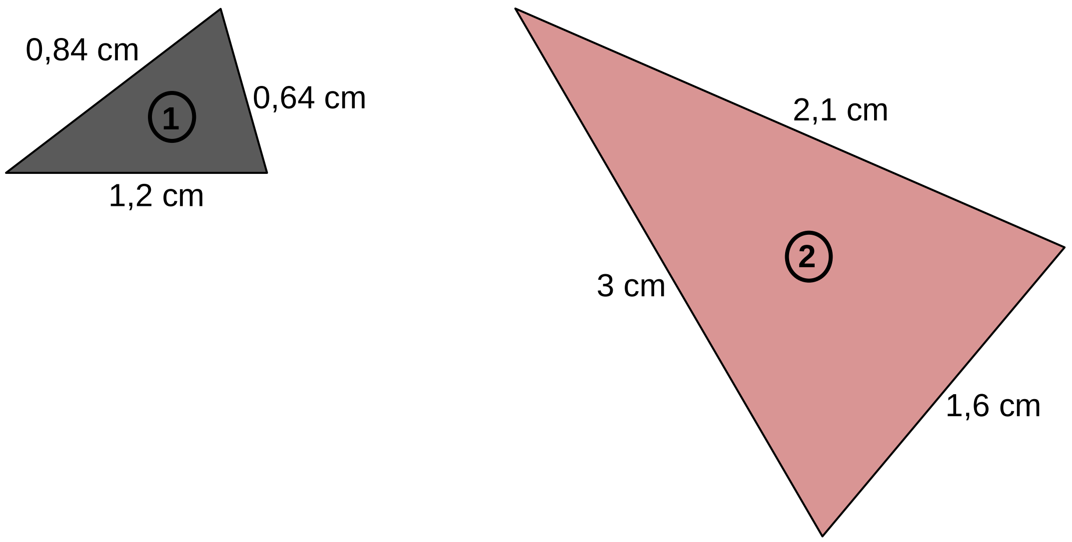
____

b)



____

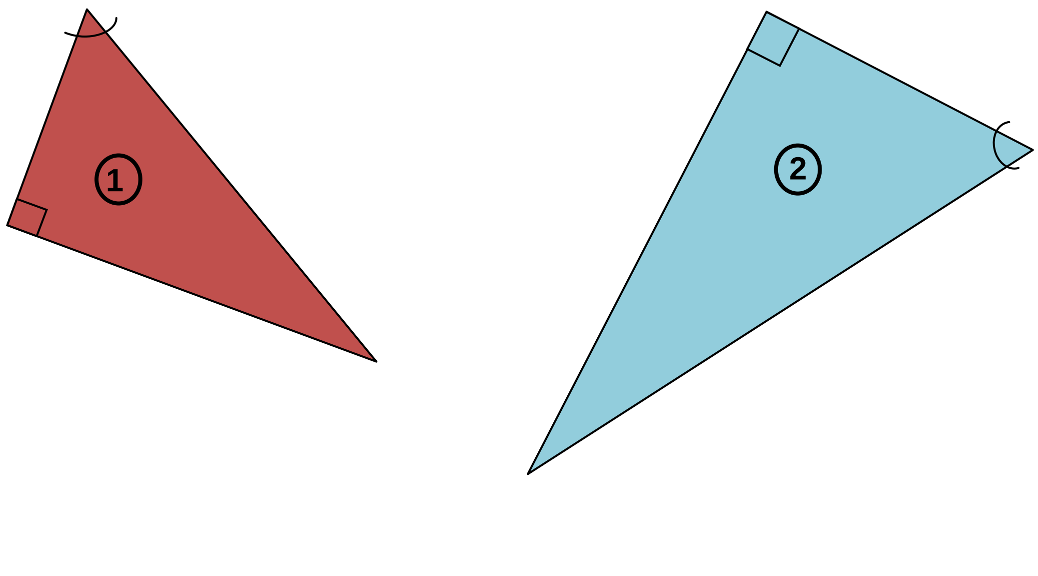
c)



____

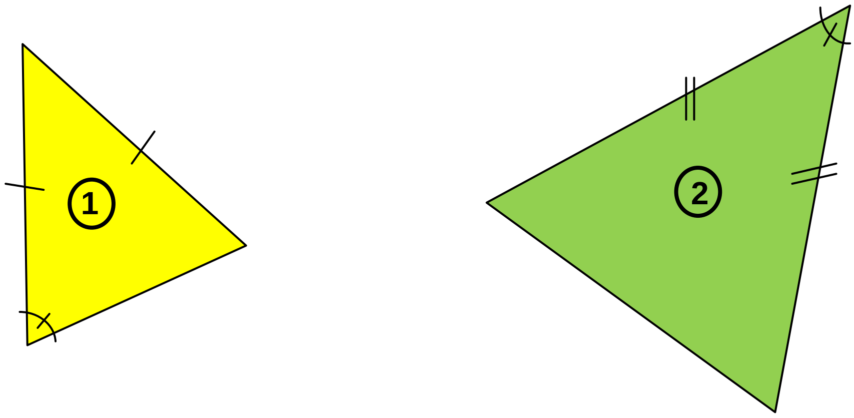
2. Pour chaque paire de triangles, indiquez celles dont les triangles sont nécessairement semblables et par quel énoncé.

a)



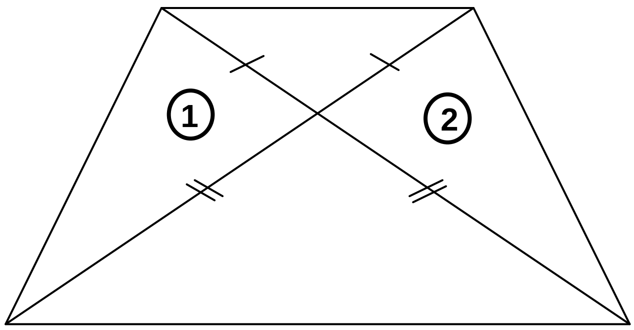
____

b)



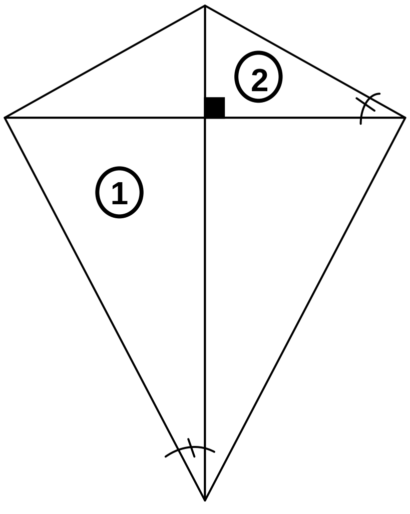
____

c)



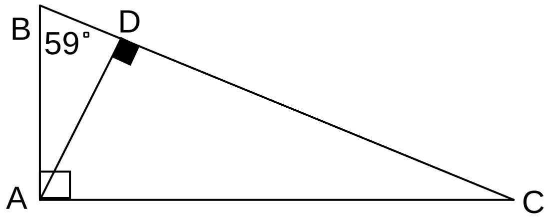
____

d)



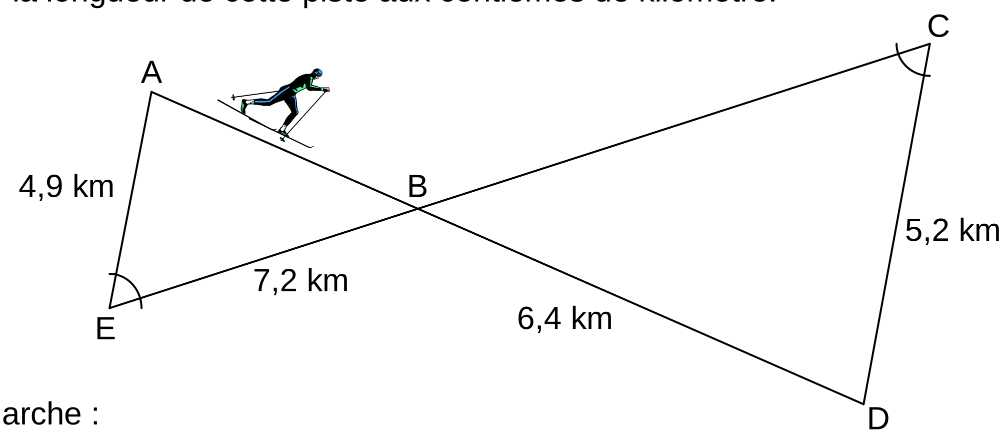
____

3. Dans la figure ci-dessous, le triangle ABC est rectangle en A et $\overline{AD}$ est une hauteur. La mesure de l'angle B est de 59°. Prouve que les triangles ABC et ADC sont semblables.



Affirmation	Justification
1. ______________________	____
2. ______________________	____
3. ______________________	____

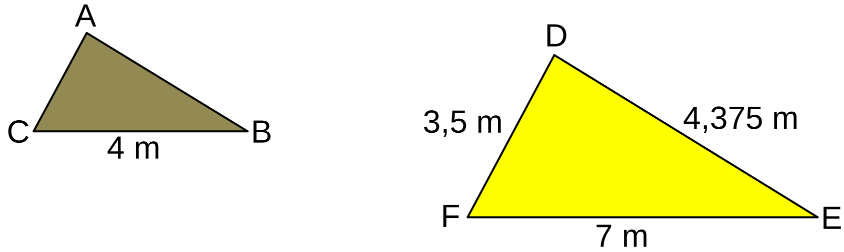
4. La piste de ski de fond illustrée ci-contre est formée de deux triangles semblables. Calcule la longueur de cette piste aux centièmes de kilomètre.



Démarche :

Réponse : __________ km

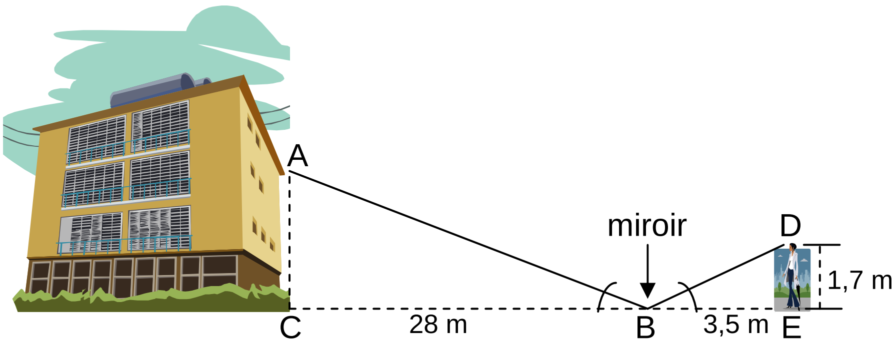
5. Sachant que $\Delta\,ABC$ et $\Delta\,DEF$ sont semblables, trouve le périmètre de $\Delta\,ABC$:



Démarche :

Réponse : ____________

6. Quelle est la hauteur de l'immeuble?



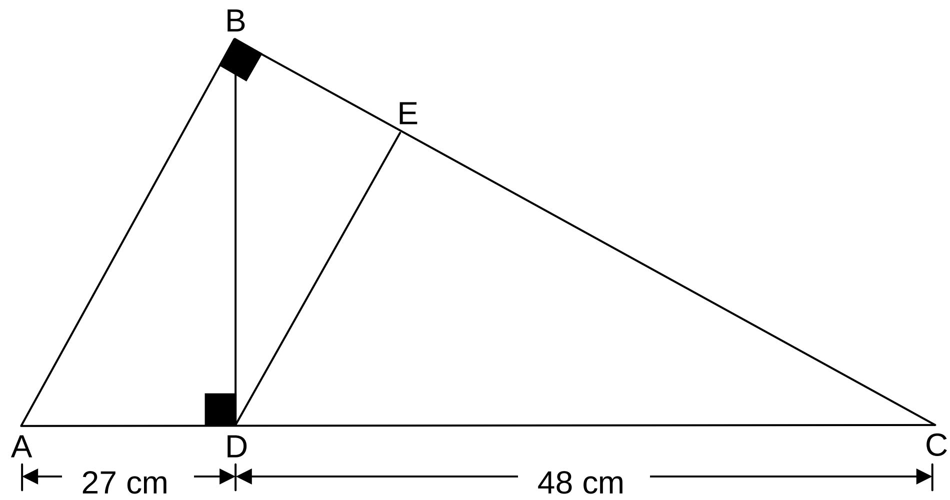
Réponse : ____________

Situations d'application

1. Deux segments dans un triangle

Dans la figure ci-dessous,

- Le triangle ABC est rectangle en B,
- Le segment BD est une hauteur du triangle ABC,
- $\overline{DE} // \overline{AB}$,
- $m\overline{AD}$ = 27 cm,
- $m\overline{DC}$ = 48 cm.



Quelle est la mesure du segment DE ?

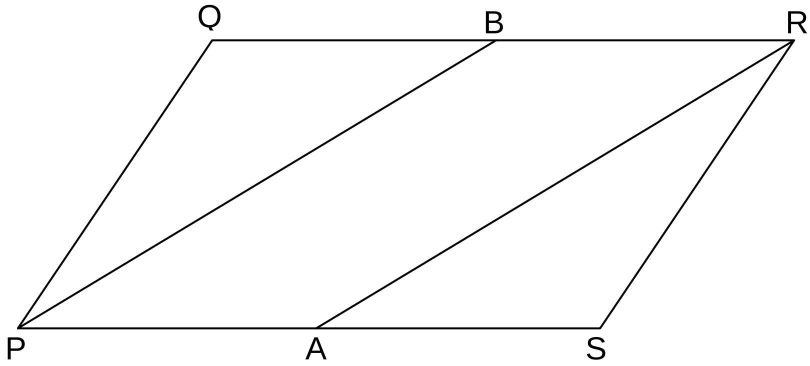
Démarche :

La mesure du segment DE est de ________ cm.

2. Des segments de droite isométriques

Le quadrilatère PQRS représenté ci-dessous est un parallélogramme.

De plus, A et B sont respectivement les points milieux des segments PS et QR.



Montrez que les segments de droite PB et AR sont isométriques.

Démarche :

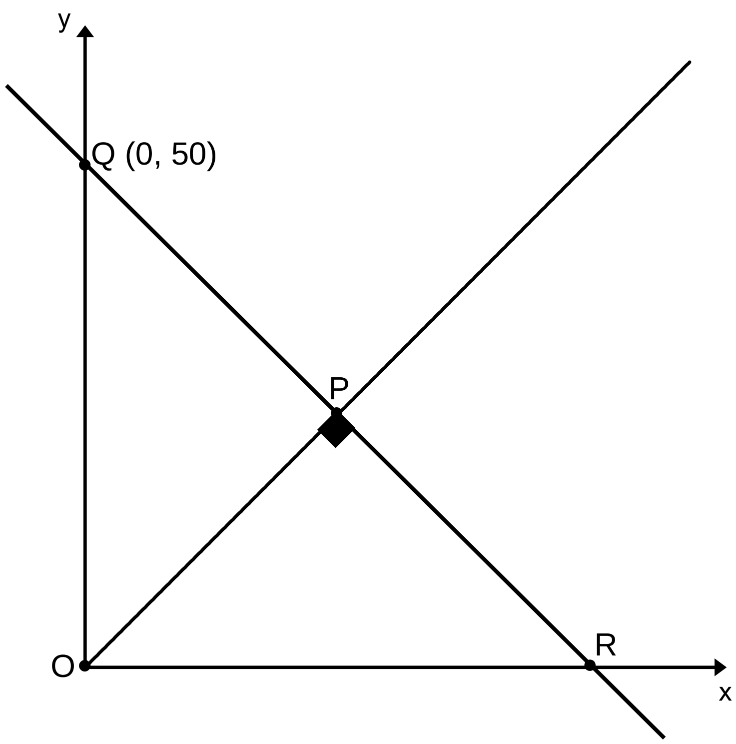
Conclusion :

3. Une bissectrice et une perpendiculaire

La droite OP est la bissectrice du premier et du troisième quadrant du plan cartésien. L'équation de la droite OP est $y = x$.

Les droites OP et QR sont perpendiculaires en P.

Le point R est l'un des points de l'axe des x.



Montrez que les triangle OQP et ORP sont isométriques.

Démarche :

4. Un quadrilatère

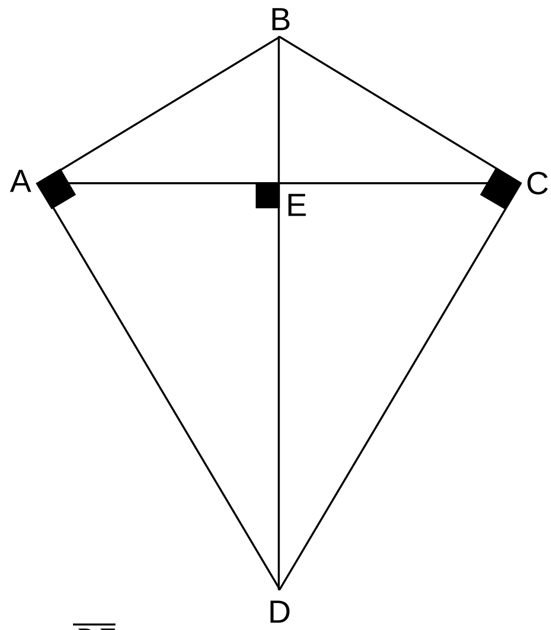
Dans le quadrilatère ABCD illustré ci-dessous, les diagonales AC et BD sont perpendiculaires et sécantes en E.

De plus,

$m\angle \mathrm{BAD} = \mathrm{m}\angle \mathrm{BCD} = 90^\circ$

$m\overline{BA} = m\overline{BC}$

$m\overline{DA} = m\overline{DC}$



Montrez que $m\,\overline{AE}\ \times m\,\overline{CE} = m\,\overline{BE}\ \times m\,\overline{DE}$.

Démarche :