Mathématique : Culture, Société et Technique
4ème secondaire

Relations dans le triangle rectangle :

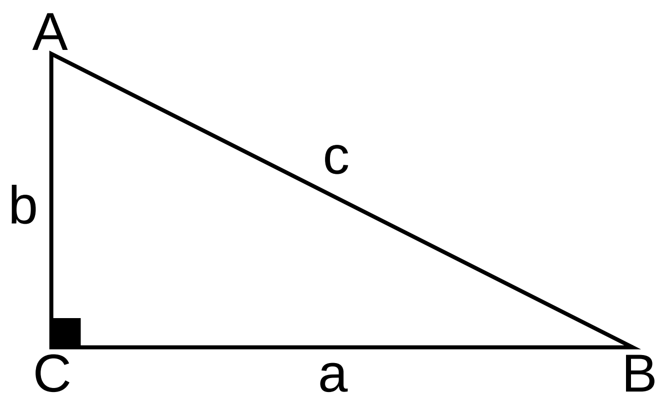
- **Relation de Pythagore**
- **Milieu de l'hypoténuse**
- **Relations métriques**

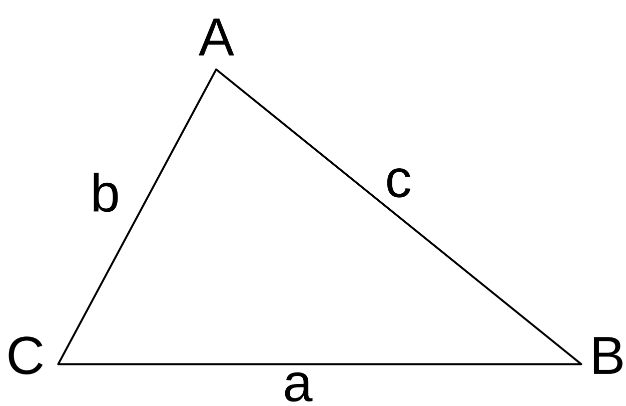
Trigonométrie :

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}$$





$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$A = \frac{b \bullet h}{2}$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

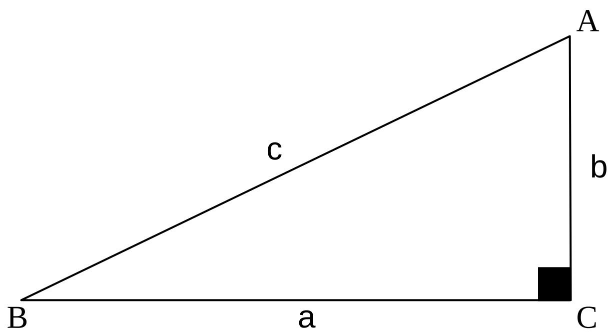
$$A = \frac{bc \bullet \sin A}{2}$$

Dans ce module, les figures ne sont pas nécessairement à l'échelle.
Quelques situations d'application s'inspirent des prototypes publiés par le MELS en 2009 et en 2010.

Relation de Pythagore :

Dans le présent chapitre, nous travaillerons souvent avec des triangles rectangles. Nous aurons donc à utiliser la **Relation de Pythagore**.

Relation de Pythagore : Le carré de la mesure de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des mesures des cathètes.



a et **b** : mesures des cathètes **c :** mesure de l'hypoténuse

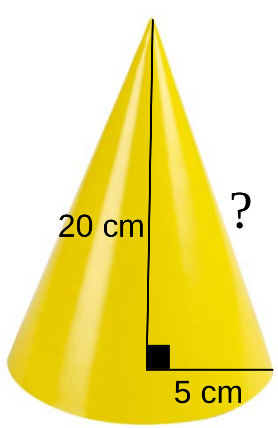
$$a^2 + b^2 = c^2$$ **:** relation de Pythagore

Pour trouver la **mesure de l'hypoténuse** si les mesures des cathètes sont connues, nous appliquons la formule, $a^2 + b^2 = c^2$, ou sa forme équivalente qui correspond à :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exercices :

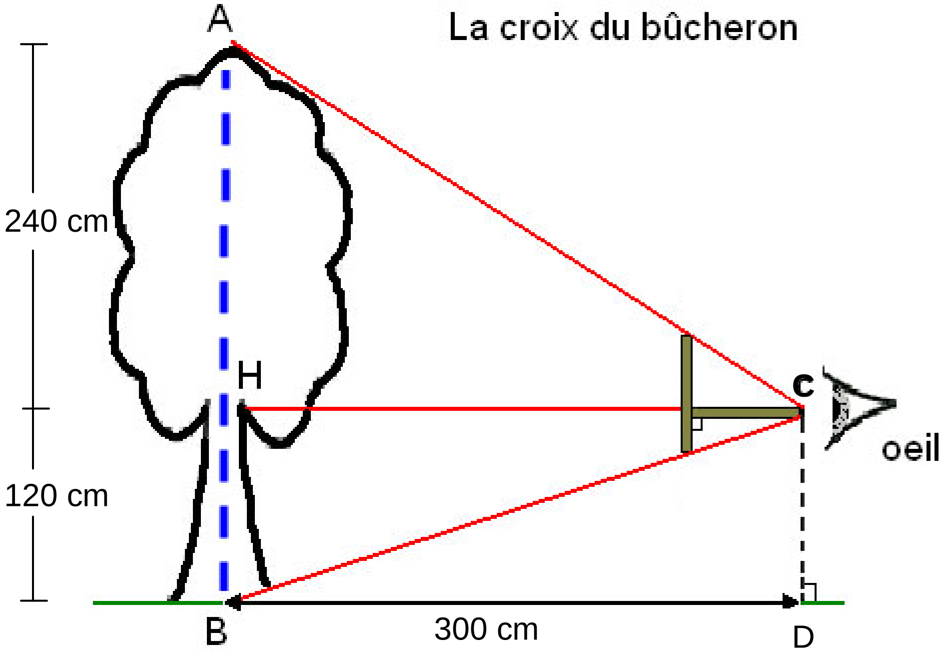
1. Le cône ci-dessous a une hauteur de 20 cm et un rayon de 5 cm, quelle est la mesure de son apothème ?



Démarche :

réponse : ______________

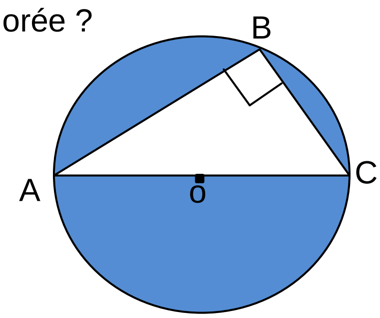
2. Calcule la longueur de segments $\overline{AC}$ et $\overline{BC}$ représentés dans la figure ci-dessous, sachant que $\overline{BD}$ mesure 300 cm :



Démarche :

Réponse : $m\overline{AC} =$ _________ cm et $m\overline{BC} =$ _________ cm

3. Le triangle rectangle ABC ci-dessous est inscrit dans un cercle de centre O.
Si $m\overline{AB}$ = 8 cm et $m\overline{BC}$ = 6 cm, quelle est l'aire de la région colorée ?
Démarche :



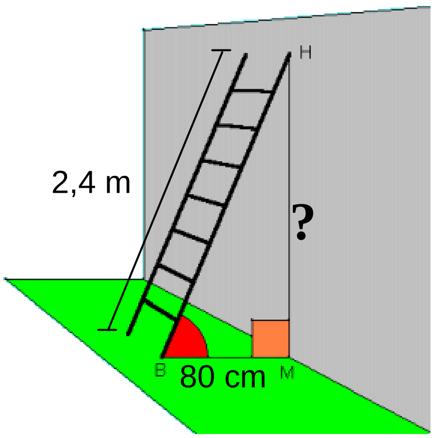
Réponse : _________ cm^2

Pour trouver la **mesure d'une cathète** si la mesure de l'hypoténuse et la mesure de l'autre cathète sont connues, nous appliquons la formule, $a^2 + b^2 = c^2$, ou sa forme équivalente qui correspond à :

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

Exercices :

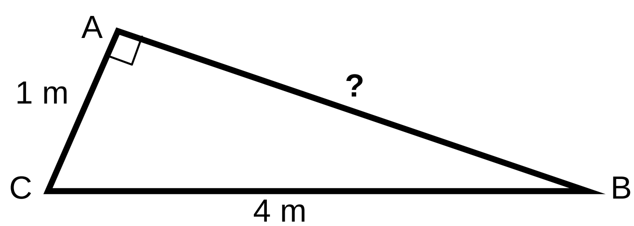
1. Quelle hauteur atteint une échelle de 2,4 m si elle est à 80 cm du pied du mur comme indiqué sur le dessin ci-dessous?



Démarche :

réponse : ______________

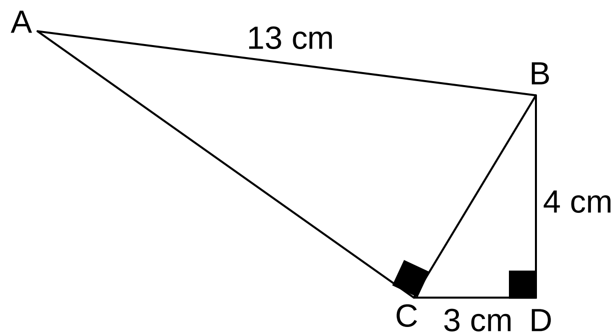
2. Quelle est la longueur de cette rampe, si elle occupe une distance horizontale de 4 mètres ? Le côté le plus court de la rampe mesure 1 mètre.



Démarche :

Réponse : ___________ m

3. Calcule l'aire du triangle ABC représenté dans la figure ci-dessous :

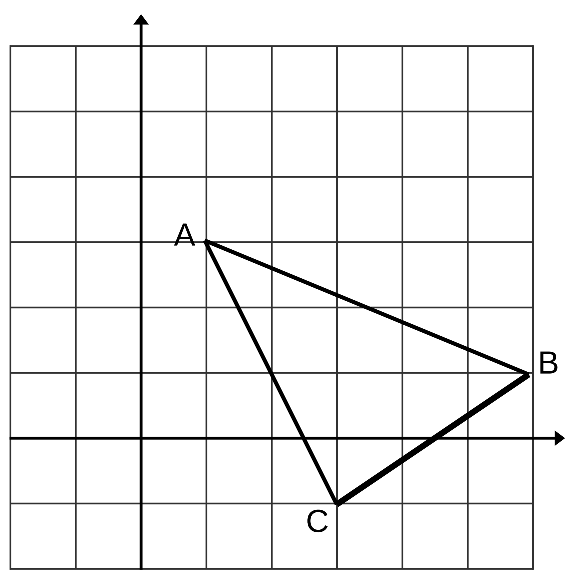


Démarche :

Réponse : ___________ cm^2

4. Détermine le périmètre du triangle ABC ci-contre.

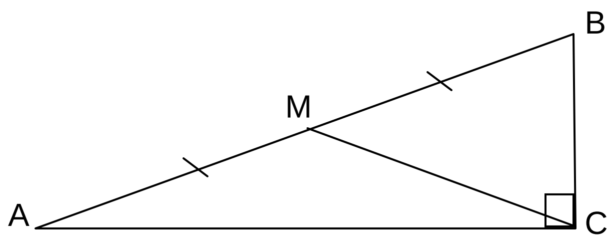
Démarche :



Réponse : _____________ unités

Médiane

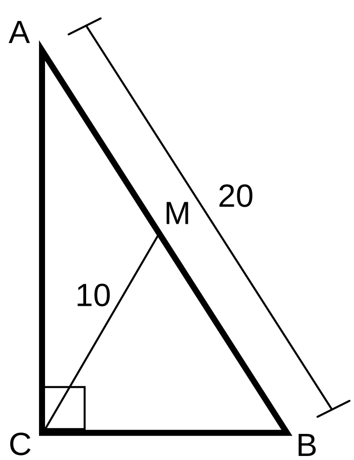
Rappel : Dans un triangle, **la médiane** issue d'un angle est le segment qui joint cet angle au milieu de son côté opposé.



$\overline{CM}$: médiane issue de C

$\overline{AM} \cong \overline{MB}$

Dans un triangle rectangle, la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.



$$m\overline{CM} = \frac{m\overline{AB}}{2}$$

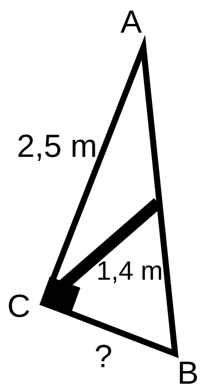
$$m\overline{CM} = \frac{20}{2}$$

$$m\overline{CM} = 10$$

Exercices :

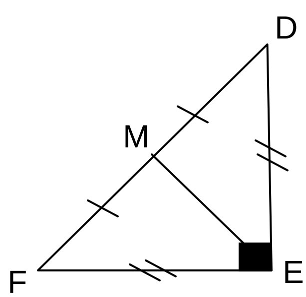
1. Pour solidifier la voile de sa planche, Sébastien coud une bande de 1,4 m qui forme la médiane issue de l'angle droit, comme illustré sur le croquis ci-dessous. Sachant que le côté $\overline{AC}$ mesure 2,5 m, quelle est la mesure du côté $\overline{BC}$?

   Démarche :



Réponse : ___________ m

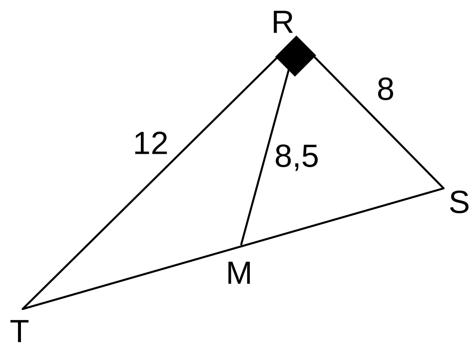
2. Quelle est la valeur de $\overline{DE}$, si la mesure de $\overline{FM}$ est de 6 unités ?



Démarche :

Réponse : _____________ unités

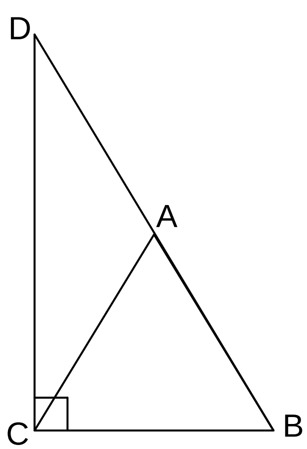
3. Dans le triangle rectangle ci-dessous, est-ce que $\overline{RM}$ correspond à une médiane issue de l'angle droit ?



Démarche :

Réponse : Oui ☐
Non ☐
Justification : ____
____

4. Le triangle ABC est équilatéral, $\overline{AC}$ correspond à la médiane, issue de l'angle droit, dans le triangle BCD. Quelle est la mesure de $\overline{CD}$, si la mesure de $\overline{AC}$ est de 7 cm ?

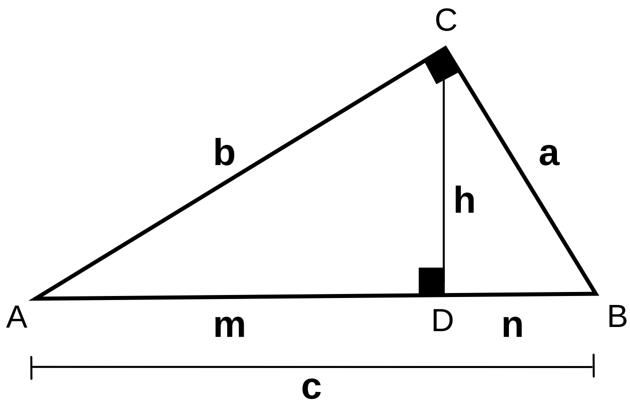


Démarche :

Réponse : __________ cm

Relations métriques dans le triangle rectangle

En abaissant une hauteur issue du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, voici les énoncés que l'on peut établir :



h : hauteur issue de l'angle droit
m : $projection\ sur\ l'hypoténuse de\ \overline{AC}$
n : $projection\ sur\ l'hypoténuse de\ \overline{CB}$

Énoncé 1

Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière, c'est-à-dire :

$\boxed{b^2 = m \cdot c}$ ou $\boxed{a^2 = n \cdot c}$

Énoncé 2

Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse, c'est-à-dire :

$$\boxed{h^2 = m \cdot n}$$

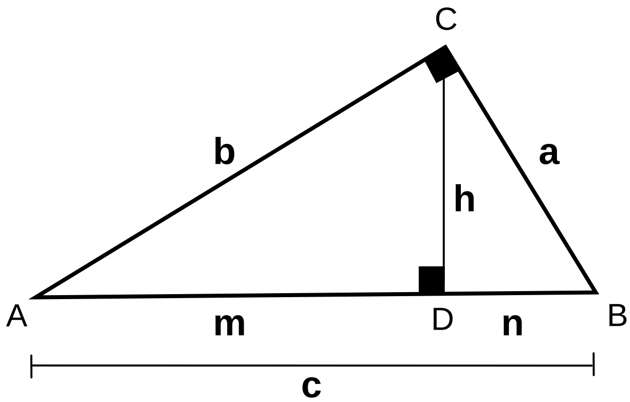
Énoncé 3

Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit, c'est-à-dire :

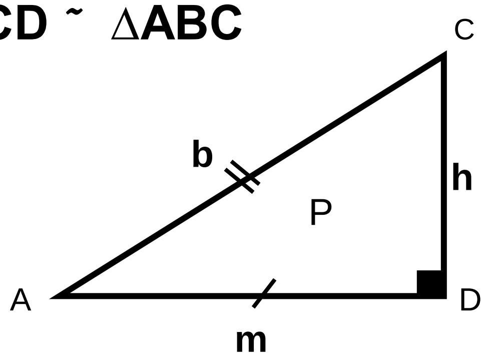
$$\boxed{c \cdot h = a \cdot b}$$

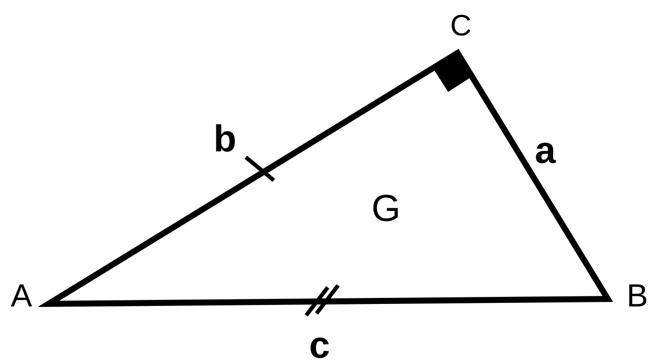
D’où viennent ces 3 relations métriques :

En abaissant une hauteur issue du sommet de l’angle droit d’un triangle rectangle, nous formons 3 paires de triangles semblables. Nous savons que dans des triangles semblables les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.



ΔACD ~ ΔABC





$$\frac{P}{G}: \boxed{\frac{m}{b} = \frac{b}{c}}$$

Dans des triangles semblables, les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.

$$\boxed{b^2 = m \cdot c}$$

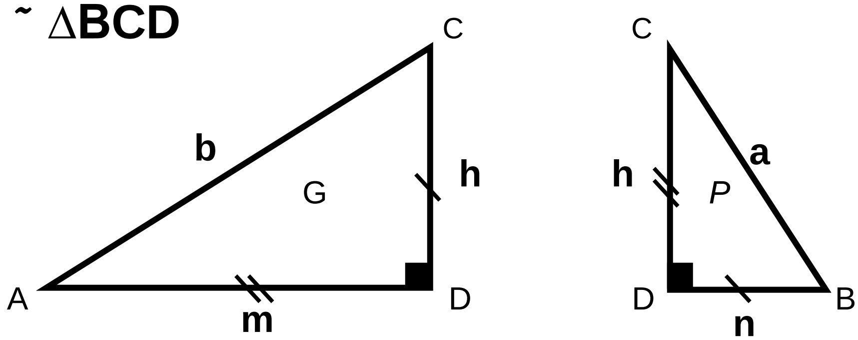
Énoncé 1

Dans des proportions, le produit des moyens égale le produit des extrêmes (produit croisé).

De même avec **ΔBCD ~ ΔABC,** nous obtenons $\boxed{a^2 = n \cdot c}$

Énoncé 1

ΔACD ~ ΔBCD



$\frac{P}{G}$: $\boxed{\frac{n}{h} = \frac{h}{m}}$

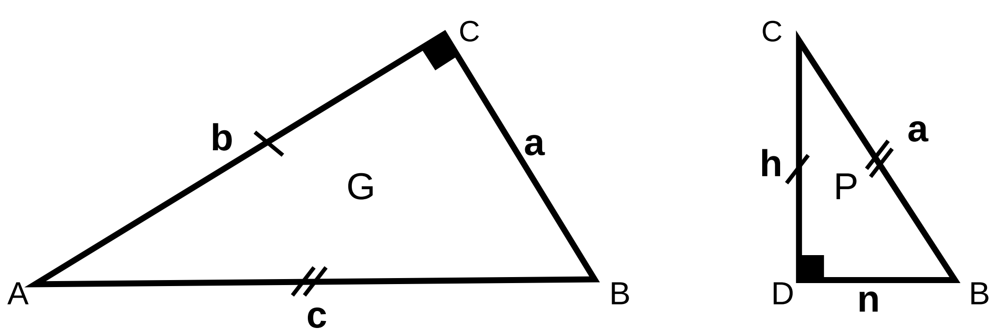
Dans des triangles semblables, les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.

$\boxed{h^2 = m \cdot n}$

Énoncé 2

Dans des proportions, le produit des moyens égale le produit des extrêmes (produit croisé).

ΔABC ~ ΔBCD



$\frac{P}{G}$: $\boxed{\frac{h}{b} = \frac{a}{c}}$

Dans des triangles semblables, les mesures des côtés homologues sont proportionnelles.

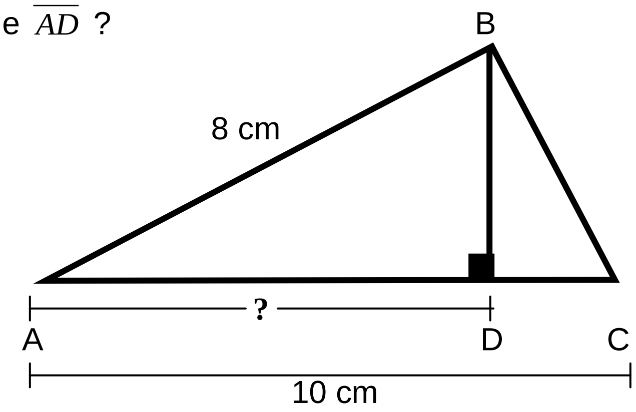
$\boxed{c \cdot h = a \cdot b}$

Énoncé 3

Dans des proportions, le produit des moyens égale le produit des extrêmes (produit croisé).

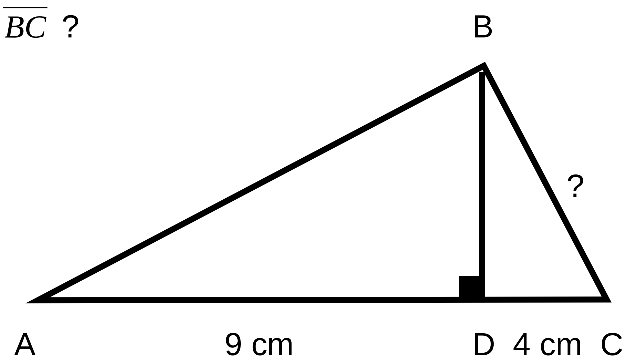
Exercices :

1) Quelle est la mesure de $\overline{AD}$?



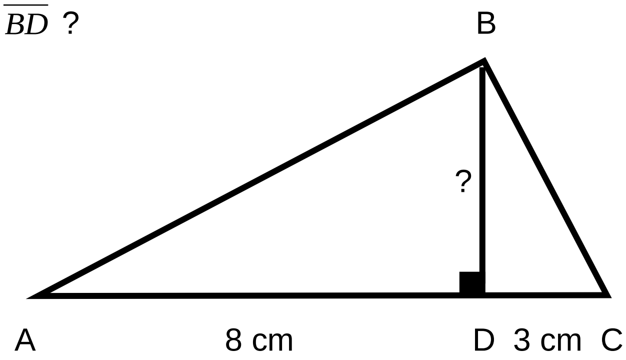
Réponse :________

2) Quelle est la mesure de $\overline{BC}$?



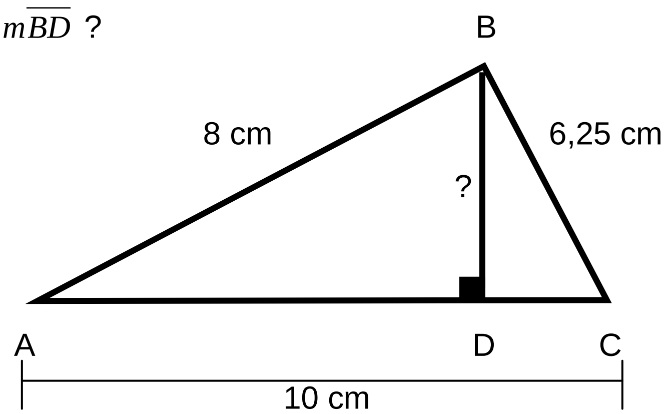
Réponse :________

3) Quelle est la mesure de $\overline{BD}$?



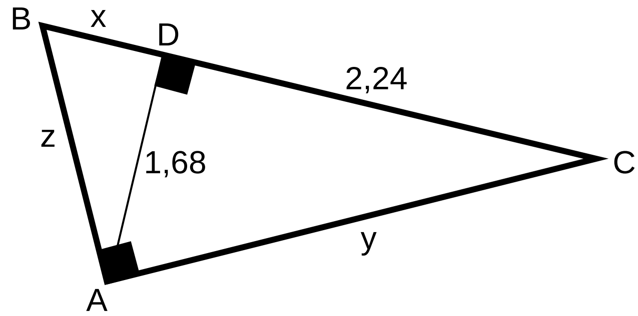
Réponse :________

4) Quelle est la mesure de $m\overline{BD}$?



Réponse :________

5. Trouve la valeur des inconnues.



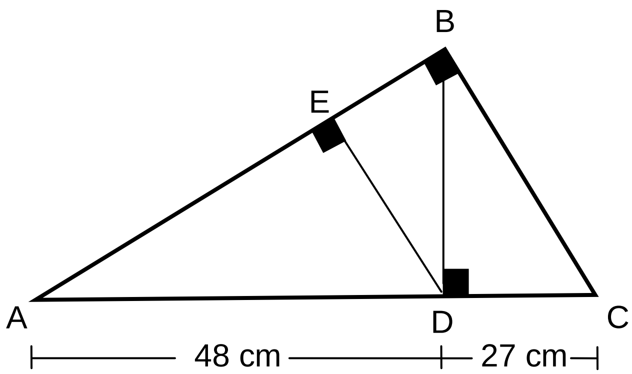
Démarche :

Réponse : x = __________ y = __________ z = __________

6. **Deux segments dans un triangle**

Dans la figure ci-dessous,

- le triangle ABC est rectangle en B,
- le segment BD est une hauteur du triangle ABC,
- $\overline{DE} \ // \ \overline{BC}$,
- $m\ \overline{AD}$ = 48 cm
- $m\ \overline{DC}$ = 27 cm



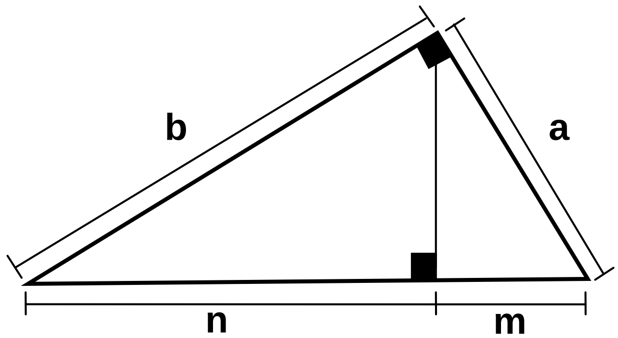
Quelle est la mesure du segment DE ?

Démarche :

Réponse : $m\overline{DE}$ = ________ cm

7. **Les côtés de l'angle droit**

Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse partage celle-ci en deux segments mesurant respectivement m et n unités.



Lorsque la valeur de **n** est 4 fois celle de **m**, il existe une relation entre les mesures des cathètes de ce triangle.

Soit **a** : mesure de la cathète adjacente au segment mesurant **m** unités
b : mesure de la cathète adjacente au segment mesurant **n** unités

Formulez une conjecture quant à la valeur du rapport $\frac{b}{a}$ dans ce type de triangle.

Démarche :

Conjecture :

Dans un triangle rectangle, si la hauteur relative à l'hypoténuse détermine sur celle-ci 2 segments dont l'un est 4 fois plus long que l'autre, ________________________________

____

Trigonométrie

La **trigonométrie** nous permet de calculer la mesure des angles et des côtés inconnus d'un triangle à partir d'éléments (angles et/ou côtés) connus.

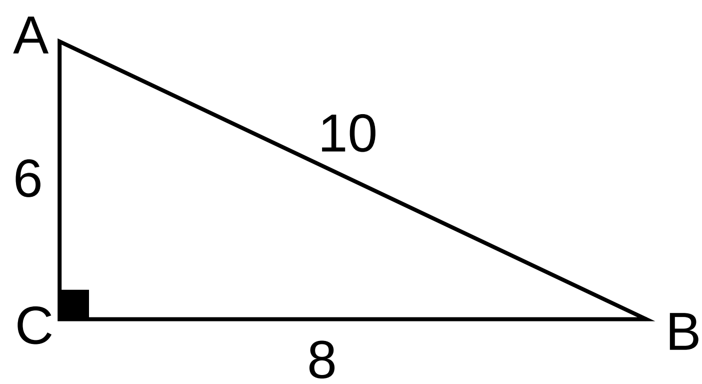
Rapports trigonométriques : rapports des mesures des côtés d'un **triangle rectangle.** Ils sont au nombre de trois et se définissent ainsi :

Sinus : mesure du **côté opposé** à un angle dans un triangle rectangle **divisée** par la mesure de **l'hypoténuse**.

$$\sin A = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$$\sin B = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

$$\sin C = \frac{10}{10} = 1^{*}$$



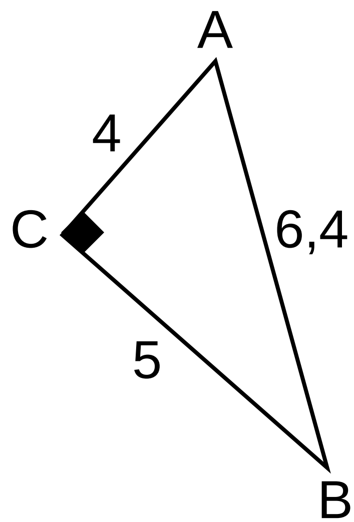
* Le sinus d'un angle de 90° = 1

Cosinus : mesure du **côté adjacent** à un angle aigu dans un triangle rectangle **divisée** par la mesure de **l'hypoténuse**.

$$\cos A = \frac{4}{6{,}4} = 0{,}625$$

$$\cos B = \frac{5}{6{,}4} = 0{,}7813$$

$$\cos C = 0 \ ^{*}$$



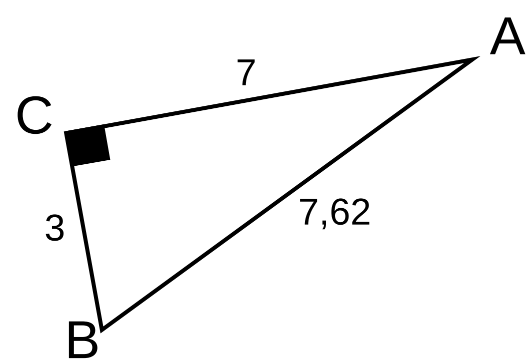
* Le cosinus d'un angle de 90° = 0

Tangente : mesure du **côté opposé** à un angle aigu dans un triangle rectangle **divisée** par la mesure du **côté adjacent** à cet angle aigu.

$$\tan A = \frac{3}{7} = 0{,}4286$$

$$\tan B = \frac{7}{3} = 2{,}3333$$

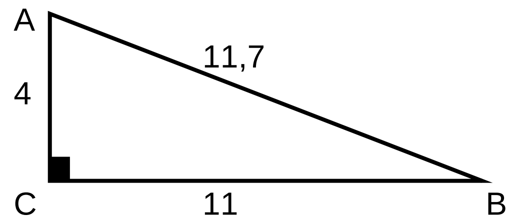
tan C : est non définie*



* La tangente d'un angle de 90° est non définie.

Exercices : **arrondis tes réponses au dix millièmes.**

Soit le triangle ABC rectangle en C.



a) Trouve le sinus des angles A et B.

sin A = $\frac{\quad}{\quad}$ = ______ sin B = $\frac{\quad}{\quad}$ = ______

b) Trouve le cosinus des angles A et B.

cos A = $\frac{\quad}{\quad}$ = ______ cos B = $\frac{\quad}{\quad}$ = ______

c) Trouve la tangente des angles A et B.

tan A = $\frac{\quad}{\quad}$ = ______ tan B = $\frac{\quad}{\quad}$ = ______

Propriétés importantes : Si **<u>m∠A + m∠B = 90°</u>**, alors **(∠A et ∠B sont complémentaires)**

sin A = cos B et **sin B = cos A**

tan A est l'inverse de tan B

tan A = $\frac{\sin A}{\cos A}$

Procédure pour mettre la calculatrice à affichage graphique en mode degré

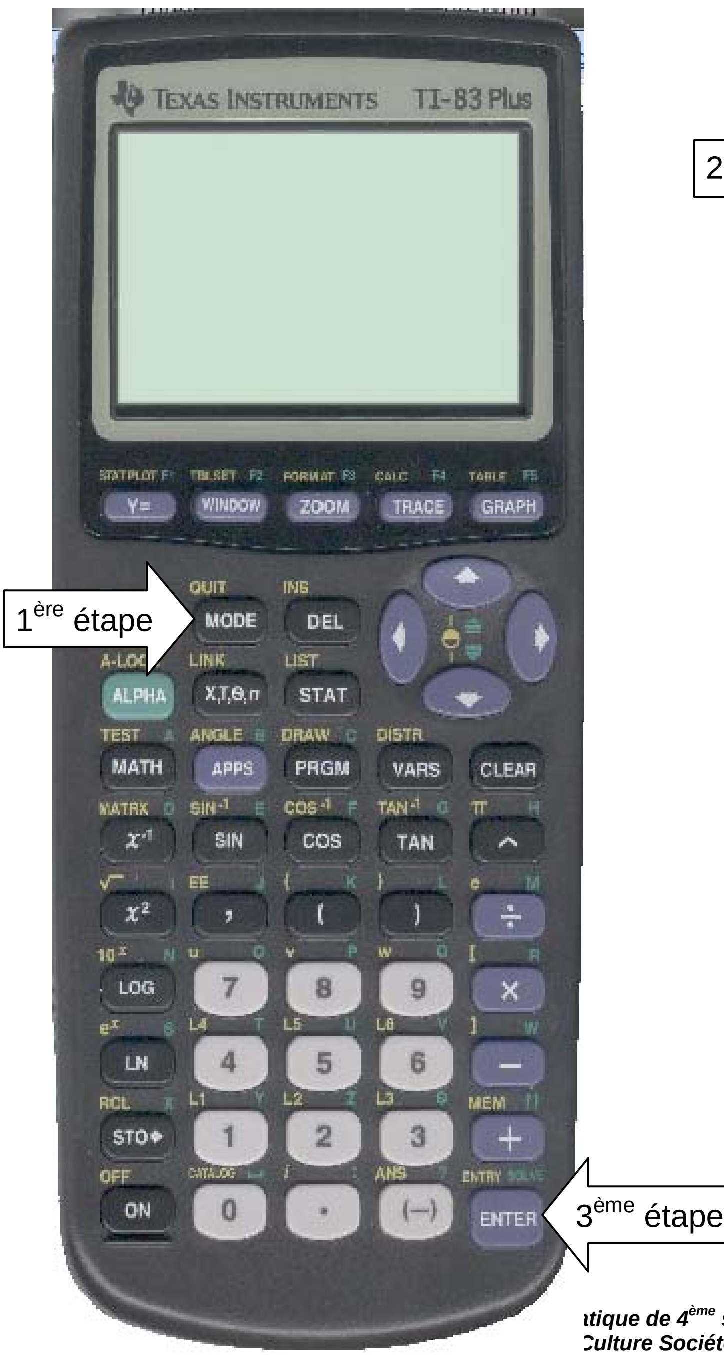
En trigonométrie, lorsque vous travaillez avec des angles qui sont mesurés en **degrés** (c'est le cas en 4ème secondaire), il faut absolument sélectionner le **mode degré** sur la calculatrice :

Pour les calculatrices à affichage graphique :

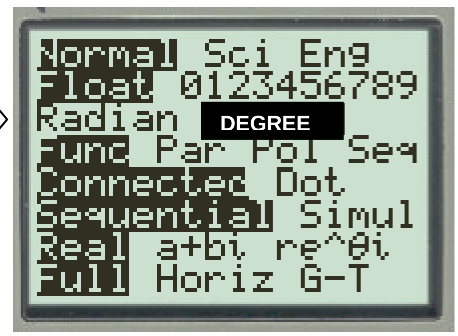
1ère étape : Appuyer sur la touche $\boxed{\textbf{MODE}}$ pour mettre la calculatrice en **mode degré**.

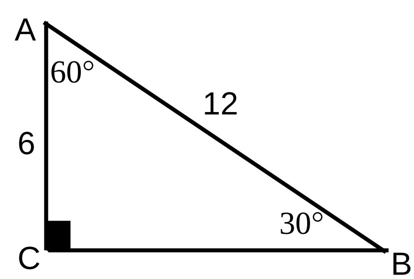
2ème étape : Sélectionner l'option **DEGREE** en vous déplaçant, sur la 3ème ligne, avec les flèches.

3ème étape : Appuyer sur $\boxed{\textbf{ENTER}}$ **.**



2ème étape





Il est possible de calculer **les rapports trigonométriques d'un angle** :

- En fonction de la mesure des côtés du triangle :

  $\sin B = \dfrac{6}{12} = 0{,}5$

- En fonction de la mesure de cet angle :

  $\sin 30^\circ = 0{,}5$ (**utilise ta calculatrice**)

Méthode pour trouver la ***<u>mesure d'un côté</u>*** dans un triangle rectangle :

Nous devons connaître :

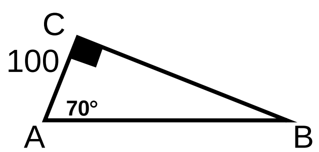
- la mesure d'un **angle aigu**
- la mesure d'un **côté**

Pour établir la **fonction trigonométrique** que nous utiliserons, nous devons nous poser les questions suivantes :

- Par rapport à l'angle aigu que je connais, quel côté je cherche ?
- Par rapport à l'angle aigu que je connais, quel côté je connais ?

Exemples: Trouve la mesure du côté $\overline{BC}$ de chacun des triangles rectangles suivants. **Arrondis tes réponses au centième près**.

a)



Par rapport à l'angle de **70°**:

- Je cherche le côté **opposé.**
- Je connais le côté **adjacent.**

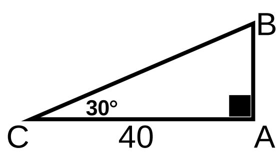
$$\frac{\boldsymbol{opposé}}{\boldsymbol{adjacent}} = \mathbf{tan\ 70}$$

$$\tan(70°) = \frac{m\overline{BC}}{100}$$

$$m\overline{BC} = 100 \times \tan 70°$$

$$m\overline{BC} \approx 274{,}75\ unités$$

b)



Par rapport à l'angle de **30°**:

- Je cherche l'**hypoténuse**
- Je connais le côté **adjacent**

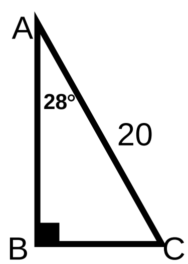
$$\frac{\boldsymbol{adjacent}}{\boldsymbol{hypoténuse}} = \mathbf{cos\,30}$$

$$\cos(30°) = \frac{40}{m\overline{BC}}$$

$$m\overline{BC} = 40 \div \cos 30°$$

$$m\overline{BC} \approx 46{,}19\ unités$$

c)



Par rapport à l'angle de **28°**:

- Je cherche le côté oppose
- Je connais l'**hypoténuse**

$$\frac{\boldsymbol{opposé}}{\boldsymbol{hypoténuse}} = \mathbf{sin\,28}$$

$$\sin(28°) = \frac{m\overline{BC}}{20}$$

$$m\overline{BC} = 20 \times \sin 28°$$

$$m\overline{BC} \approx 9{,}39\ unités$$

Méthode pour trouver la ***mesure d'un angle*** dans un triangle rectangle :

Nous devons connaître :

- la mesure de **2 côtés**

Pour établir la **fonction trigonométrique** que nous utiliserons, nous devons nous poser la question suivante :

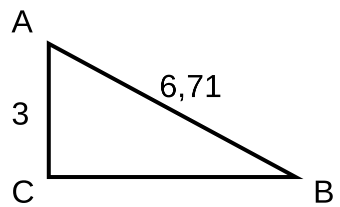
- Par rapport à l'angle que je cherche, quels côtés je connais ?

Comme nous cherchons la mesure d'un angle, nous devons effectuer, avec la calculatrice, une des séquences suivantes :

- $\boxed{2^{nd}}\boxed{\sin}$ ou $\boxed{2^{nd}}\boxed{\cos}$ ou $\boxed{2^{nd}}\boxed{\tan}$

Exemples: Calcule la mesure de l'angle A dans les différents triangles en effectuant qu'un seul calcul. **Arrondis tes réponses au dixième près**.

a)

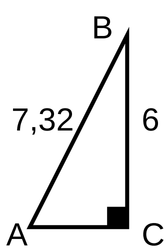


Par rapport à l'angle A, nous connaissons le **côté adjacent** et l'**hypoténuse.** Alors :

$m\angle A = \boxed{2^{nd}}\boxed{\cos}(3 \div 6{,}71) = 63{,}4^\circ$

$m\angle A = \cos^{-1}(\mathbf{3} \div 6{,}71) = 63{,}4^\circ$

b)

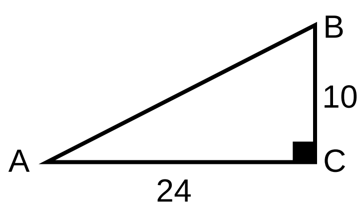


Par rapport à l'angle A, nous connaissons le **côté opposé** et l'**hypoténuse**. Alors :

$m\angle A = \boxed{2^{nd}}\boxed{\sin}\ (6 \div 7{,}32) = 55{,}1^\circ$

$m\angle A = \sin^{-1}(6 \div 7{,}32) = 55{,}1^\circ$

c)



Par rapport à l'angle A, nous connaissons le **côté opposé** et le **côté adjacent**. Alors :

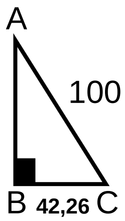
$m\angle A = \boxed{2^{nd}}\boxed{\tan}\ (10 \div 24) = 22{,}6^\circ$

$m\angle A = \tan^{-1}(10 \div 24) = 22{,}6^\circ$

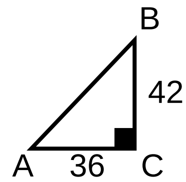
Exercices: Arrondis la mesure des **angles au dixième près** et la mesure des **côtés au centième près.** Les figures ne sont pas à l'échelle.

1. Détermine la mesure des angles inconnus et du côté inconnu dans les figures suivantes.

a)



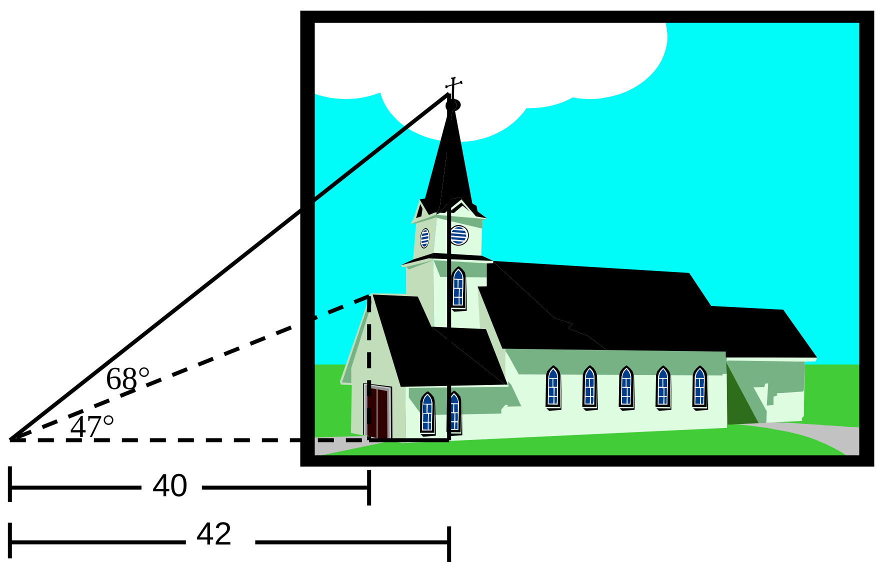
b)



réponse :________

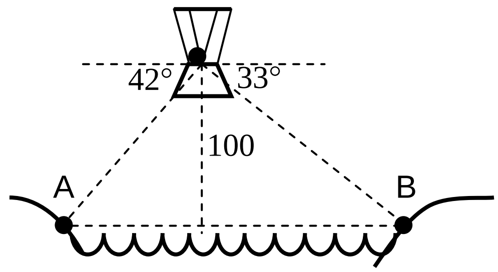
réponse :________

2. Quelle est la différence de hauteur entre le toit et le clocher.



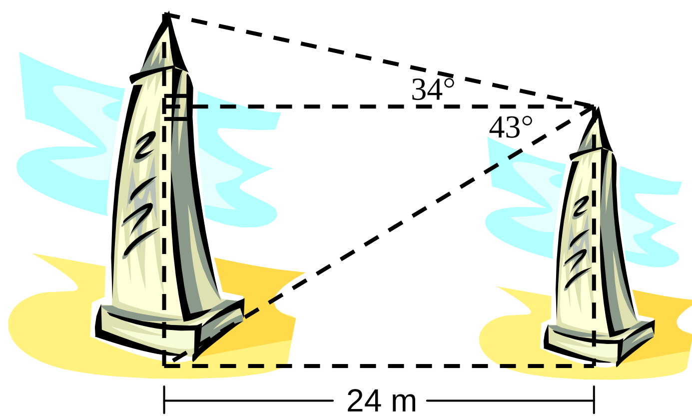
réponse :________

3. Trouve la largeur $\overline{AB}$ de la rivière.



réponse :________

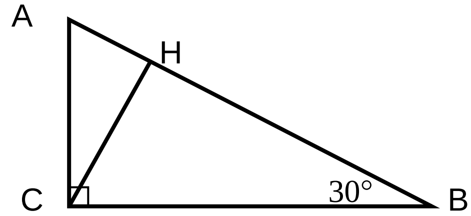
4. Trouve la hauteur des deux monuments historiques.



réponse :________________

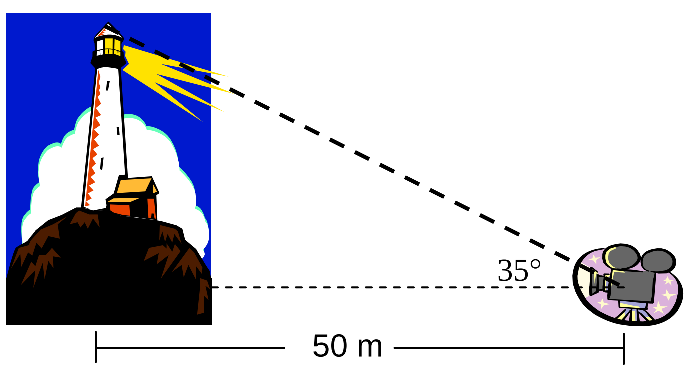
____

5. Une charpente $\overline{AB}$ mesurant 5,20 m fait un angle de 30° avec l'horizontale. Une poutre CH est nécessaire pour la soutenir. Quelle est la longueur de cette poutre ?



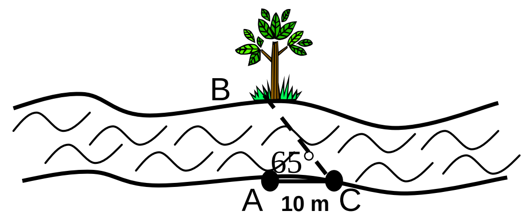
réponse :_______________

6. Un phare est installé au-dessus d'une colline. Un photographe situé à 50 m du centre de la base de la colline mesure à l'aide d'un clinomètre l'angle d'élévation du sommet du phare. Il trouve que cet angle mesure 35°. Trouve la distance entre le sommet du phare et l'appareil du photographe pour qu'il ajuste le zoom avant de prendre une photo.



réponse :_______________

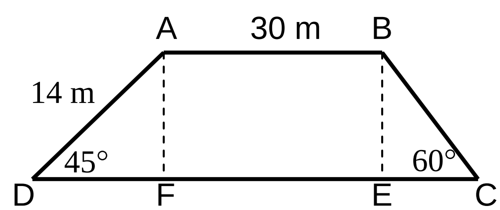
7. Pour mesurer la largeur d'une rivière, un campeur procède de la façon suivante : il place un piquet au point A vis-à-vis de l'arbre situé en B, de l'autre côté de la rivière. Il se déplace ensuite au point C situé à 10m du point A dans une direction perpendiculaire à celle de $\overline{AB}$. À l'aide d'un appareil de mesure, il observe que l'angle BCA mesure 65°. Quelle est la largeur de la rivière au niveau du point A ?



réponse :_______________

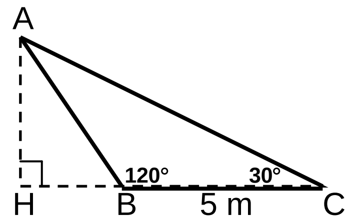
8. Un terrain a la forme d'un trapèze. Calcule la superficie de ce terrain.

$$A = \frac{(B+b)h}{2}$$



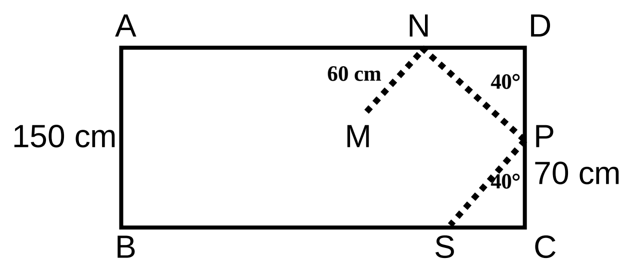
réponse :_______________

9. Calcule la hauteur $\overline{AH}$ du triangle ci-contre.



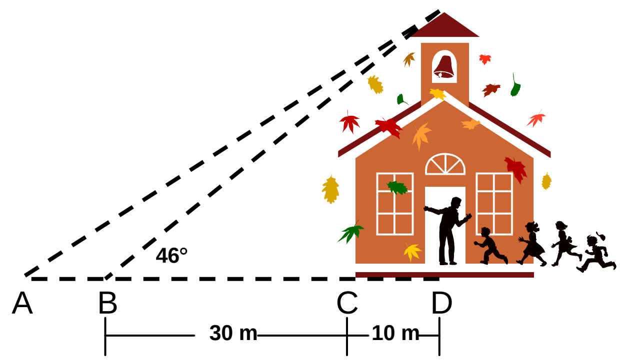
réponse :_______________

10. Au billard, une boule placée au point M effectue le trajet illustré jusqu'à s'immobiliser au point S. Quelle est la longueur du trajet si la distance $\overline{MN}$ est égale à 60 cm.



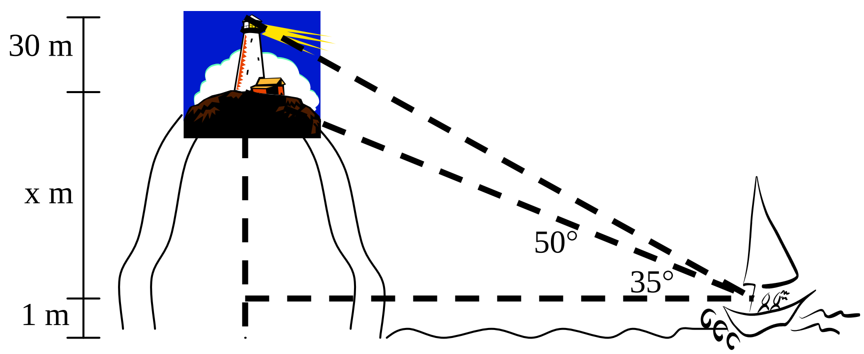
réponse :_______________

11. La partie ombrée $\overline{BC}$ adjacente à l'école mesure 30 m au moment où les rayons du soleil forment un angle de 46° avec l'horizontale. Quelle sera la longueur de la partie ombrée $\overline{AC}$ lorsque l'angle d'élévation du soleil aura diminué de 15° ?



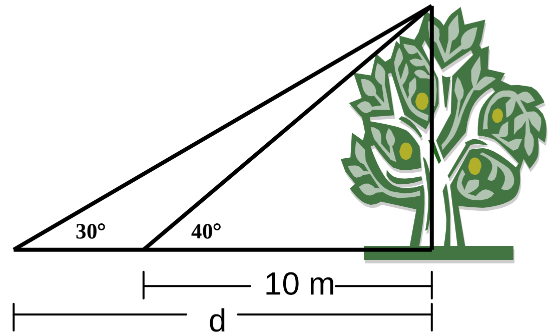
réponse :_______________

12. À l'aide d'un clinomètre, un observateur situé sur un bateau veut calculer la hauteur d'une falaise où surplombe un phare de 30 m de hauteur. Il obtient les mesures représentées sur la figure ci-dessous. Quelle est la hauteur de la falaise ?



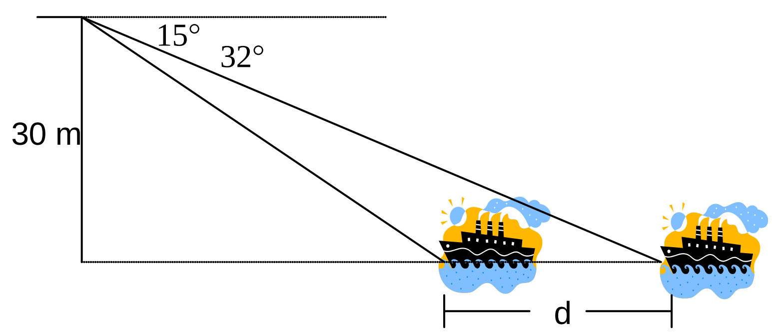
réponse :_______________

13. Un marcheur observe la cime d'un arbre avec un angle de 40°. Se reculant de quelques pas, il observe à nouveau la cime avec un angle de 30°. À quelle distance de l'arbre se situe-t-il s'il était en premier lieu à 10 mètres de l'arbre ?



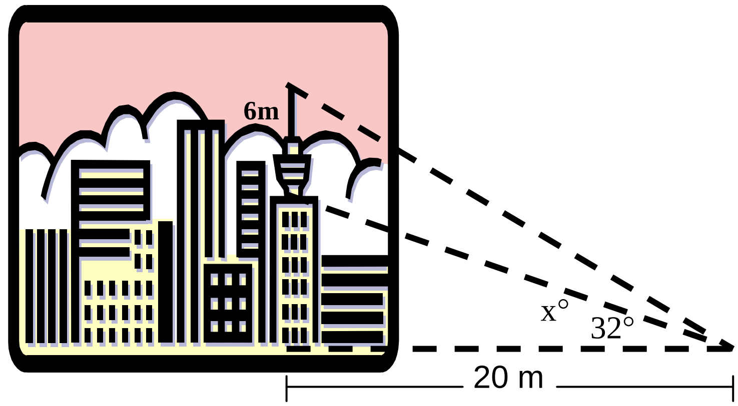
réponse :________________

14. Jean observe, du haut d'un pont de 30 m, sous un angle de dépression de 15°, un bateau. Un instant plus tard il observe le même bateau sous un angle de 32°. Trouve la distance que le bateau a parcourue.



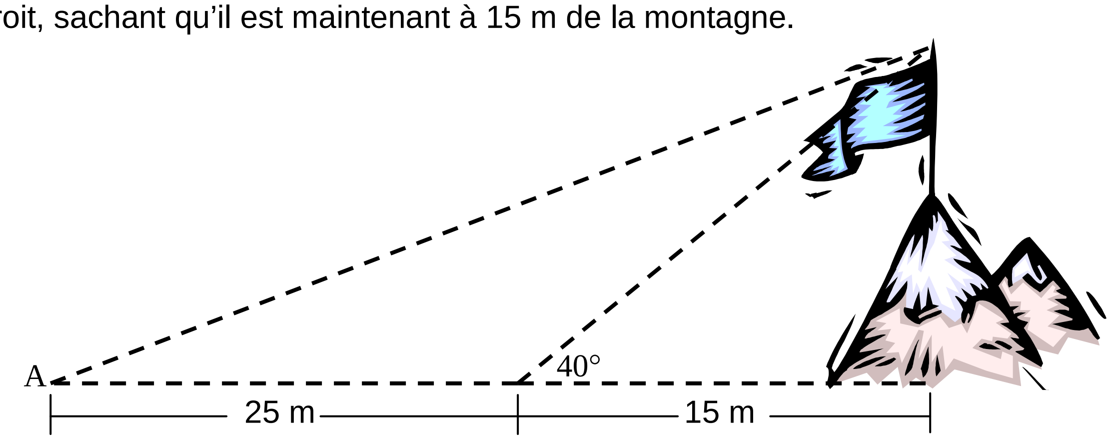
réponse :________________

15. Une antenne décore le toit d'un édifice. À 20 m de cet édifice, Anne examine le toit avec un angle d'élévation de 32°. Avec quel angle verra-t-elle la cime de cette antenne haute de 6 m ?



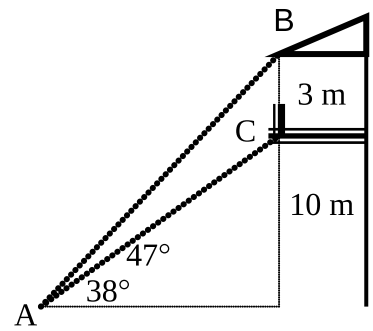
réponse :_______________

16. Un guide voit, à 40 m d'une montagne, le haut de celle-ci. Se rapprochant un peu, avec un angle de 40°, il y distingue un drapeau. Trouve la mesure de l'angle d'observation (∠A) du premier endroit, sachant qu'il est maintenant à 15 m de la montagne.



réponse :_______________

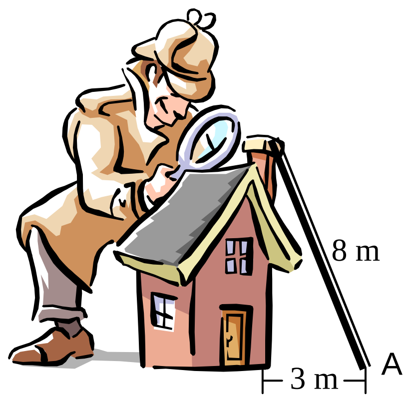
17. Un balcon est aperçu avec un angle de 38°. Par contre sa toiture est vue avec un angle de 47°. Le balcon et sa toiture sont situés respectivement à 10 m et à 13 m du sol. Quelles mesures devront avoir les banderoles d'anniversaire qui sont représentées par les segments $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sur le schéma ci-dessous.



réponse :________________

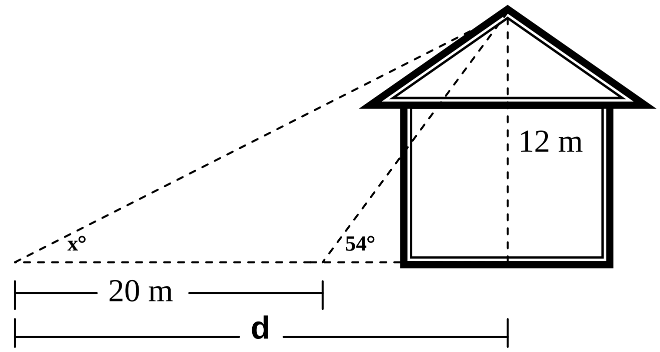
____

18. Un inspecteur en bâtiment se demande si l'angle formé entre le sol et l'échelle qu'un homme utilise pour ramoner la cheminé est inférieur à 75°. Pour répondre à sa question, calcule la mesure de l'angle A, sachant que l'échelle mesure 8 m et que le pied de celle-ci est à 3 m de la maison



réponse :________________

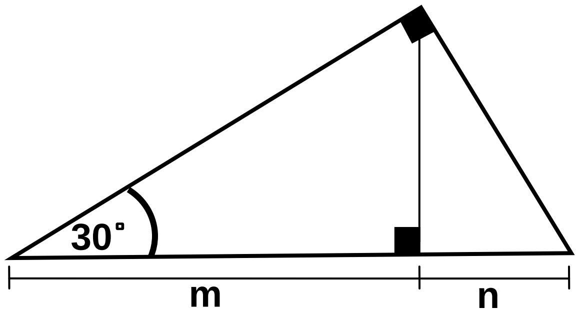
19. Un passant voit le toit d'une maison avec un angle de 54°. Se reculant de 20 m, il voit le sommet du toit avec un angle de **x**°. Si le sommet est à une hauteur de 12 m du sol, trouve la distance **d** et l'angle **x.**



réponse :_______________

20. **Hauteur relative à l'hypoténuse**

Dans un triangle rectangle ayant un angle de 30˚, la hauteur relative à l'hypoténuse partage celle-ci en deux segments mesurant respectivement m et n unites, où **m** $>$ **n** .



On sait que la valeur du rapport $\frac{m}{n}$ est supérieure à 1.

Formulez une conjecture précisant la valeur du rapport $\frac{m}{n}$ dans ce type de triangle.

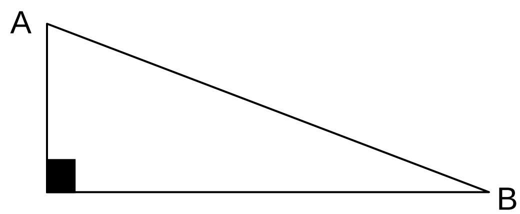
Démarche:

Conjecture:
Dans un triangle rectangle ayant un angle de 30˚, la hauteur relative à l'hypoténuse partage celle-ci en deux segments mesurant respectivement m et n unites, où **m** $>$ **n** .

La valeur du rapport $\frac{m}{n}$ est de ______ dans ce type de triangle.

21. **Des angles complémentaires**

Deux angles sont complémentaires si la somme de leurs mesures est de 90˚.



On sait que **A** est un angle aigu et que **B** est son angle complémentaire.

Formulez une conjecture décrivant le lien entre la valeur du sinus d'un angle aigu et la valeur du cosinus de son angle complémentaire.

Démarche:

Conjecture:

____

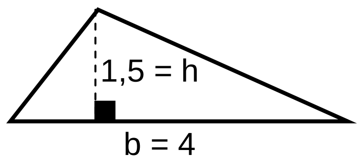
____

Aire des triangles

Nous pouvons utiliser <u>3 formules</u> pour calculer l'aire des triangles :

1) $\boxed{A=\dfrac{b\bullet h}{2}}$ si on connaît : **<u>une base</u>** et **<u>la hauteur</u>** relative à cette base.

Ex :



$$A=\frac{b\bullet h}{2}$$

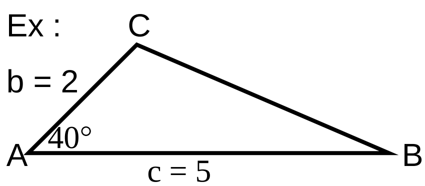
$$A=\frac{4\bullet 1{,}5}{2}$$

$$A=3$$

réponse : <u>3 unités carrées</u>

2) $\boxed{A=\dfrac{b\bullet c\bullet \sin A}{2}}$ si on connaît : **<u>un angle</u>** et **<u>les côtés qui le forment</u>**.

Ex :



$$A=\frac{b\bullet c\bullet \sin A}{2}$$

$$A=\frac{2\bullet 5\bullet \sin 40°}{2}=3{,}21$$

réponse : <u>3,21 unités carrées</u>

3) **Formule de Héron** :

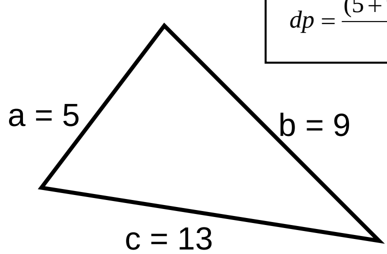
$$\boxed{A=\sqrt{\left(dp\bullet\left(dp-a\right)\bullet\left(dp-b\right)\bullet\left(dp-c\right)\right)}}$$

: où **demi-périmètre :** $dp=\dfrac{(a+b+c)}{2}$

si on connaît : **<u>les 3 côtés</u>**

Exemples :

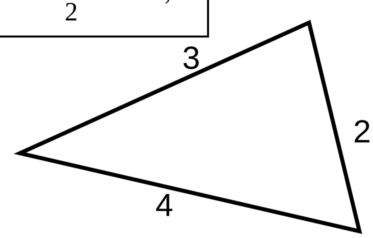
$$\boxed{dp=\frac{(5+9+13)}{2}=13{,}5}$$



$$A=\sqrt{\left(13{,}5\bullet\left(13{,}5-5\right)\bullet\left(13{,}5-9\right)\bullet\left(13{,}5-13\right)\right)}$$

<u>A = 16,07 unités carrées</u>

$$\boxed{dp=\frac{(3+2+4)}{2}=4{,}5}$$



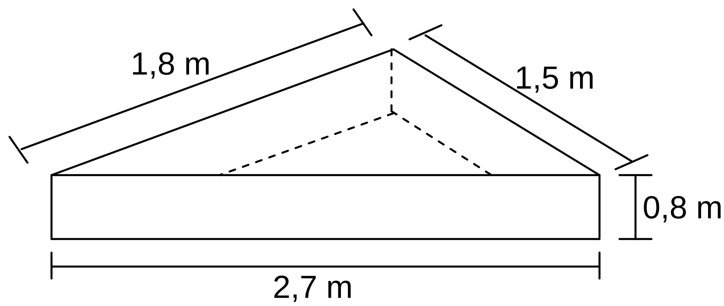
$$A=\sqrt{\left(4{,}5\bullet\left(4{,}5-3\right)\bullet\left(4{,}5-2\right)\bullet\left(4{,}5-4\right)\right)}$$

<u>A = 2,90 unités carrées</u>

Exercice :

1. **La boîte à fleurs**

Steve veut acheter de la terre pour remplir une boîte à fleurs avant de semer des fleurs. La boîte a la forme d'un prisme droit à base triangulaire. Les côtés de la base mesure respectivement 1,8 m, 1,5 m et 2,7 m. La hauteur de la boîte est de 0.8 m.



La quantité de terre qu'il faut mettre dans la boîte correspond à 90% de sa capacité. Le coût de la terre est de 18$ par m^3.

Quel est le coût de l'achat de la terre ?

Démarche :

Réponse : ___________ $

Résolution de triangles quelconques

Puisque nous n'avons <u>pas toujours des triangles rectangles</u>, nous devons utiliser d'autres stratégies :

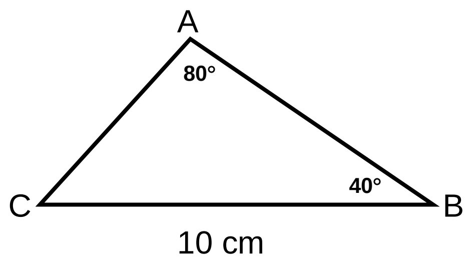
Loi des Sinus

$$\boxed{\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}}$$

Cette loi est utilisable dès que l'on connaît les mesures :

d'un angle avec son côté opposé et **un autre élément** (angle ou côté) dans un triangle.

Exemple$_1$: Trouve les éléments inconnus du ΔABC ou résous le ΔABC.



1)
$$\frac{10}{\sin 80} = \frac{m\overline{AC}}{\sin 40}$$

$m\overline{AC} = 10\times \sin(40) \div \sin(80)$

$\underline{m\overline{AC} = 6{,}53 \text{ unités}}$

2) m $\angle$C = 180°- 80°- 40°

$\underline{\text{m } \angle C = 60°}$

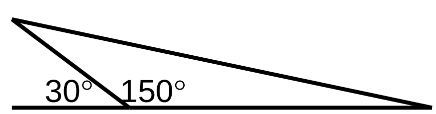
3)
$$\frac{10}{\sin 80} = \frac{m\overline{AB}}{\sin 60}$$

$m\overline{AB} = 10\times \sin(60) \div \sin(80)$

$\underline{m\overline{AB} = 8{,}79 \text{ unités}}$

Attention : $\boxed{\sin A° = \sin (180 - A)°}$

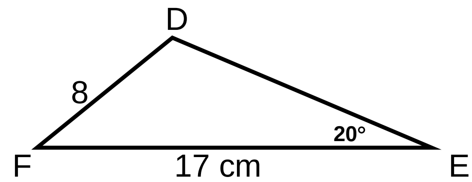
sin 30° = sin 150°



La calculatrice calcule seulement la mesure des angles aigus avec la fonction :
$\boxed{2^{nd}}$ $\boxed{\text{sin}}$.

Si nous voulons la mesure d'un **angle obtus**, nous devons chercher **l'angle supplémentaire à l'angle obtenu avec la calculatrice**.

Exemple$_2$: Trouve les éléments inconnus du ΔDEF ou résous le ΔDEF.
(**attention $\angle$D est obtus**)



1)

$$\frac{8}{\sin 20} = \frac{17}{\sin \angle D}$$

$m\angle\mathbf{D} = \sin^{-1}(\sin(20) \times 17 \div 8)$

$m\angle\mathbf{D} = 46{,}6^\circ$ **comme $\angle$D est obtus**

alors $m\angle\mathbf{D} = 180^\circ - 46{,}6^\circ = 133{,}4^\circ$

$m\angle\mathbf{D} = 133{,}4^\circ$

2)

m $\angle$F = 180˚- 20˚- 133,4˚

m $\angle$F= 26,6˚

3)

$$\frac{8}{\sin 20} = \frac{m\overline{DE}}{\sin 26{,}6}$$

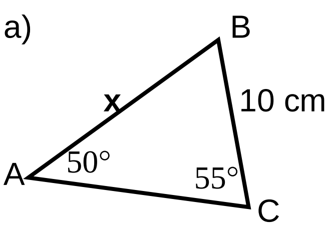
$m\overline{DE} = 8 \times \sin(26{,}6) \div \sin(20)$

$m\overline{DE} = 10{,}47$ cm

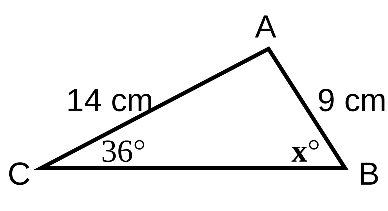
Exercices: Arrondis la mesure des **angles au dixième près** et la mesure des **côtés au centième près.** Les figures ne sont pas à l'échelle.

1. Trouve la valeur de **x**.

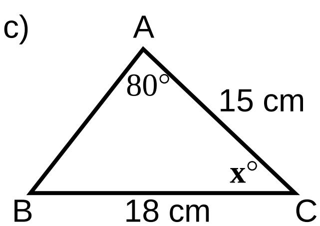
a)

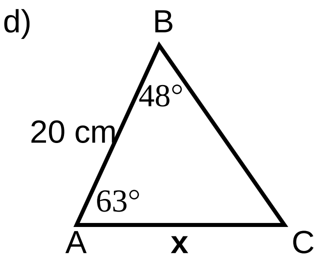


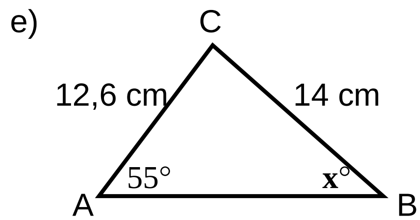
b)

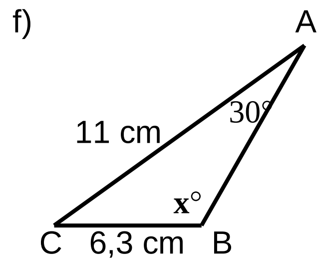


c)



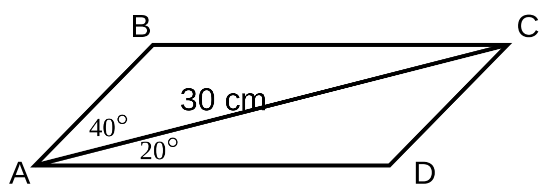






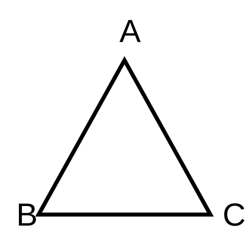
_____ _____ _____

2. Soit un parallélogramme ABCD dont la grande diagonale $\overline{AC}$ mesure 30 cm. Cette diagonale partage les angles A et C en deux angles de 20° et 40°. Quelle est la mesure de $\overline{AB}$ et de $\overline{BC}$?



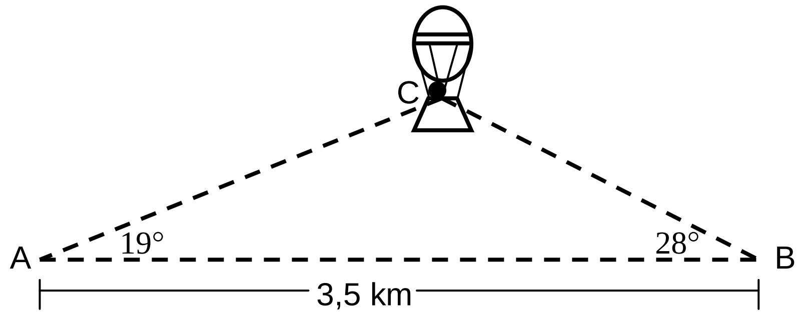
m $\overline{AB}$ _____cm et m $\overline{BC}$ _____cm

3 Le triangle ABC est isocèle, m$\overline{BC}$ = 15 cm et m∠A = 40°. Quelle est la mesure des côtés congrus $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$?



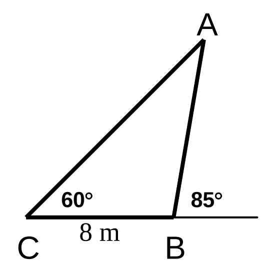
Réponse : _____ cm

4. Deux personnes se trouvent respectivement aux points A et B, à une distance de 3,5 km. Elles observent une montgolfière. Du point A, l'angle d'élévation est de 19°, au même instant, l'angle d'élévation du point B est de 28°. À quelle distance de la montgolfière est située chacune de ces personne (m$\overline{AC}$ et m$\overline{BC}$) ?



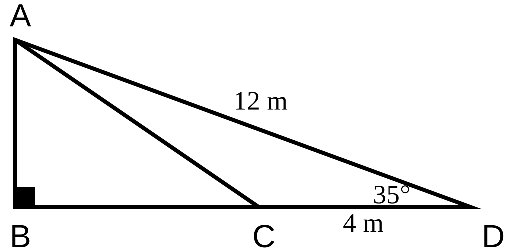
m$\overline{AC}$ = ________km m$\overline{BC}$ = ________km

5. L'angle d'élévation du sommet d'une falaise est de 60° lorsqu'on est situé au point C. Si l'angle d'inclinaison de la falaise est de 85° et que le point C est situé à 8 mètres de la base de la falaise, trouve la longueur (m$\overline{AB}$) de la falaise.



m$\overline{AB}$ = ______ m

6. Un câble ($\overline{AD}$), d'une longueur de 12 mètres, fait un angle de 35° avec le sol. Si on rapprochait le point d'ancrage de 4 mètres, en direction du poteau, et qu'on le fixait au point C, quelle serait :



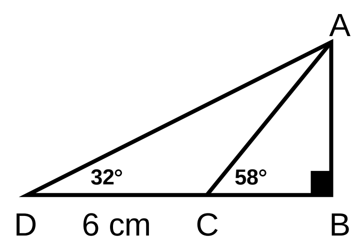
a) la hauteur du poteau $\overline{AB}$?

b) la longueur du câble $\overline{AC}$?

m $\overline{AB}$ = ______ m

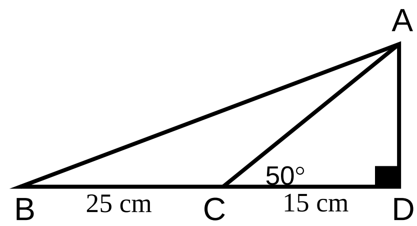
m $\overline{AC}$ = ______ m

7. Évalue, la mesure de $\overline{AB}$, si la mesure de $\overline{DC}$ = 6 cm



$m\overline{AB} =$ _____ cm

8. Dans le triangle ABD, évalue:



a) m $\overline{AC}$

m $\overline{AC}$ =_____cm

b) m $\overline{AB}$

m $\overline{AB}$ =_____cm

9. **La hauteur de l'arbre**

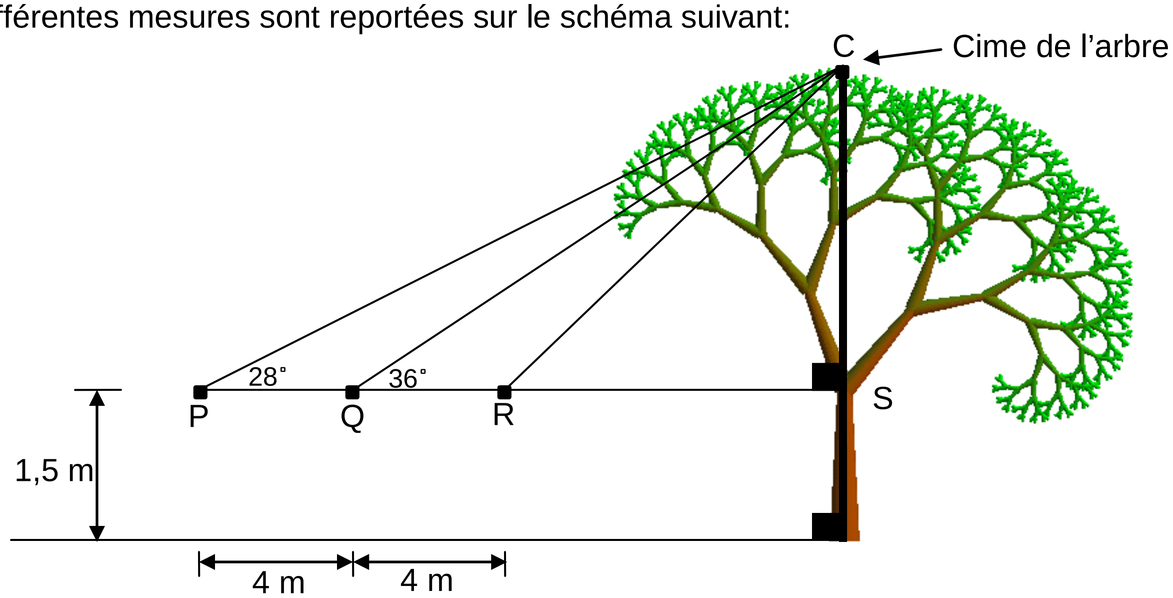
À l'aide d'un clinomètre, Anne mesure, à partir de différentes positions, l'angle d'élévation de la cime d'un arbre.

Au moment de prendre ses mesures, Anne tient le clinomètre à 1,5 m du sol.

Lorsque le clinomètre est à la position P, Anne note un angle d'élévation de la cime de l'arbre de 28˚.

Anne avance de 4 m vers l'arbre et place le clinomètre à la position Q. Elle note alors un angle d'élévation de 36˚, soit 8˚ de plus que celui noté à la position P.

Ces différentes mesures sont reportées sur le schéma suivant:



Anne pense que si elle avance de 4 m de plus vers l'arbre de manière à placer le clinomètre à la position R, la mesure de l'angle d'élévation de l'arbre augmentera à nouveau de 8˚.

Anne a-t-elle raison ou tort? Expliquez pourquoi.

Démarche:

Réponse:

Anne a raison ☐
Anne a tort ☐

Explication: ____

____

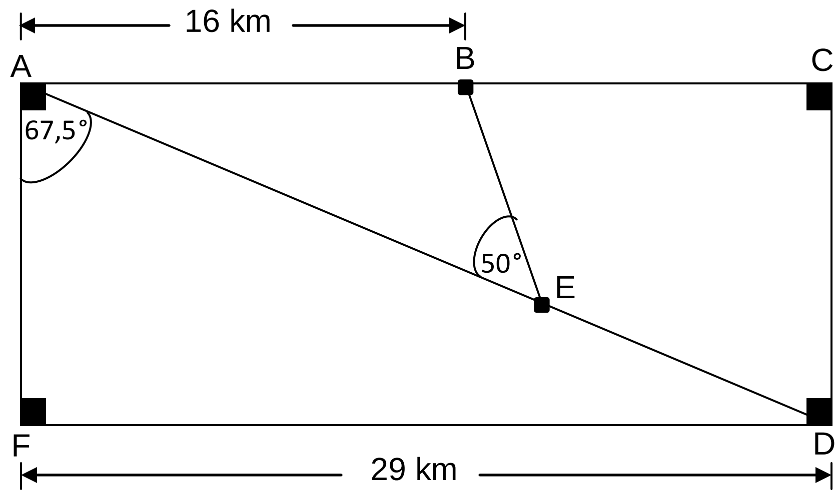
____

10. **Une randonnée en ski de fond**

Dans la figure suivante, les segments de droite représentent des sentiers de ski de fond. Les points A, B, C, D, E et F représentent des relais.

De plus,

- ❖ Le quadrilatère ACDF est un rectangle,
- ❖ B est l'un des points du segment AC,
- ❖ E est l'un des points de la diagonal AD,
- ❖ $m\overline{AB} = 16\ km$
- ❖ $m\overline{FD} = 29\ km$
- ❖ $m\angle FAD = 67{,}5°$
- ❖ $m\angle AEB = 50°$



Aujourd'hui, Xavier commence sa randonnée au relais F. Il se rend d'abord au relais A. Il parcourt ensuite les 16 km séparant les relais A et B. De là, il se rend au relais E où il passera la nuit.

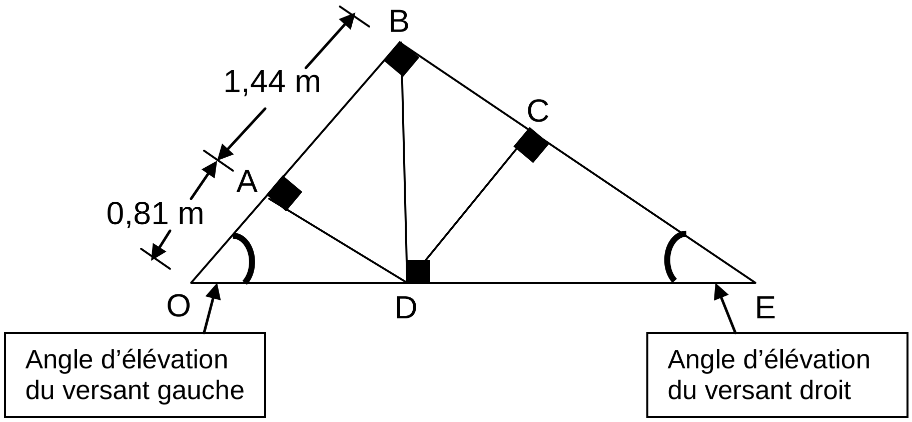
À l'unité près, combien de kilomètres Xavier a-t-il parcourus en ski de fond aujourd'hui ?

Démarche:

Réponse: ___________ km

11. **La toiture**

Marc a illustré ci-dessous une ferme du toit de sa remise. Il a aussi noté quelques mesures.



Vous devez trouver la mesure de l'angle d'élévation du versant gauche, la mesure de l'angle d'élévation du versant droit et la longueur du versant $\overline{BE}$.

Démarche:

Réponse: La mesure de l'angle d'élévation du versant gauche : __________

La mesure de l'angle d'élévation du versant droit: __________

La longueur du versant $\overline{BE}$: __________

Réponses

Pages 2 - 3

1. 20,62 cm
2. $m\overline{AC} = 384{,}19\ cm$ $\quad m\overline{BC} = 323{,}11\ cm$
3. 54,54 cm^2

Pages 4 – 5

1. 2,26 m
2. 3,87 m
3. 30 cm^2
4. 13,47 unités

Pages 7 - 8

1. 1,26 m
2. 8,49 unités

3. 1) Si $\overline{RM}$ est une médiane issue de l'angle droit
   alors $m\overline{TM}$ = $m\overline{MS}$ = $m\overline{RM} = 8{,}5$ et $\boldsymbol{m\overline{ST} = 17}$
   2) mais $\boldsymbol{m\overline{ST} = 14{,}42}$ Relation de Pythagore
   réponse : non

4. 12,12 cm

Pages 12 à 16

1. 6,4 cm
2. 7,21 cm
3. 4,90 cm
4. 5 cm
5. x = 1,26 y = 2,8 z = 2,1

6. $m\overline{BD}^2 = 27 \times 48$ Dans un triangle rectangle, la mesure de la hauteur issue du sommet
$m\overline{BD}^2 = 1\,296$ de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des
$m\overline{BD} = 36$ deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$m\overline{AB}^2 = 48 \times 75$ Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit
$m\overline{AB}^2 = 3600$ est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur
$m\overline{AB} = 60$ l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière.

$60 \times m\overline{DE} = 36 \times 48$ Dans un triangle rectangle, le produit des mesures de l'hypoténuse et de la hauteur correspondante égale le produit des mesures des côtés de l'angle droit.

$\boldsymbol{m\overline{DE} = 28,8}$

7. Premier exemple :

Supposons que $m = 5$. Alors $n = 4m$

$n = 4 \times 5$

$n = 20$

Dans un triangle rectangle, la mesure de chaque côté de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre la mesure de sa projection sur l'hypoténuse et celle de l'hypoténuse entière

Valeur de a	**Valeur de b**
$a^2 = m(m+n)$	$b^2 = n(m+n)$
$a^2 = 5 \times (5+20)$	$b^2 = 20 \times (5+20)$
$a^2 = 5 \times 25$	$b^2 = 20 \times 25$
$a^2 = 125$	$b^2 = 500$
$a = \sqrt{125}$	$b = \sqrt{500}$
$a = 11{,}180\ 3 \ldots\ldots$	$b = 22{,}360\ 6 \ldots\ldots$

Valeur de $\boldsymbol{\frac{b}{a} = \frac{22{,}360\ 6}{11{,}180\ 3}}$

$\boldsymbol{\frac{b}{a} = 2}$

Deuxième exemple :

Supposons que $m = 6$. Alors $n = 4m$

$n = 4 \times 6$

$n = 24$

Valeur de a	**Valeur de b**
$a^2 = m(m+n)$	$b^2 = n(m+n)$
$a^2 = 6 \times (6+24)$	$b^2 = 24 \times (6+24)$
$a^2 = 6 \times 30$	$b^2 = 24 \times 30$
$a^2 = 180$	$b^2 = 720$
$a = \sqrt{180}$	$b = \sqrt{720}$
$a = 13{,}416\ 4 \ldots\ldots$	$b = 26{,}832\ 8 \ldots\ldots$

Valeur de $\boldsymbol{\frac{b}{a} = \frac{26{,}832\ 8}{13{,}416\ 4}}$

$\boldsymbol{\frac{b}{a} = 2}$

Conjecture :

Dans un triangle rectangle, si la hauteur relative à l'hypoténuse détermine sur celle-ci 2 segments dont l'un est 4 fois plus long que l'autre, **le rapport des mesures des cathètes de ce triangle est égale à $\boldsymbol{\frac{2}{1}}$.**

ou

une cathète est 2 fois plus longue que l'autre.

Page 19

a) Trouve le sinus des angles A et B.

sin A = $\boxed{\dfrac{12}{13}}$ = $\boxed{0{,}92}$ sin B = $\boxed{\dfrac{5}{13}}$ = $\boxed{0{,}38}$

b) Trouve le cosinus des angles A et B.

cos A = $\boxed{\dfrac{5}{13}}$ = $\boxed{0{,}38}$ cos B = $\boxed{\dfrac{12}{13}}$ = $\boxed{0{,}92}$

c) Trouve la tangente des angles A et B.

tan A = $\boxed{\dfrac{12}{5}}$ = $\boxed{2{,}4}$ tan B = $\boxed{\dfrac{5}{12}}$ = $\boxed{0{,}42}$

Page 22

a) 63,4°

b) 55,1°

c) 22,6°

Pages 23 à 34

1. a) 90,63 b) 55,32
2. 61,06
3. 265,05
4. 22,38 m et 38,57 m
5. 2,25 m
6. 61,04 m
7. 21,45 m
8. 374,32 m^2
9. 4,33 m
10. 255,81 cm
11. 58,93 m
12. 43,86 m
13. 14,53 m
14. 63,95 m
15. 42,8°
16. 17,5°

17. 16,24 m et 17,78 m
18. mesure de l'angle A = 68˚ et 68˚ est inférieur à 75˚
19. 28,72 m et 22,7˚

20. **Hauteur relative à l'hypoténuse**

Posons m = 22

Valeur de h

$\tan 30° = \frac{h}{m}$

$\tan 30° = \frac{h}{22}$

$22 \times \tan 30° = h$

$\mathbf{12{,}701\ 7\ldots} = \mathrm{h}$

Valeur de n

$\tan 60° = \frac{h}{n}$

$n = \frac{h}{\tan 60°}$

$n = \frac{\mathbf{12{,}701\ 7\ldots}}{\tan 60°}$

$n = 7{,}\overline{3}$

Valeur du rapport

$\frac{m}{n} = \frac{22}{7{,}\overline{3}} = \mathbf{3}$

Posons m = 15

Valeur de h

$\tan 30° = \frac{h}{m}$

$\tan 30° = \frac{h}{15}$

$15 \times \tan 30° = h$

$\mathbf{8{,}660\ 2\ldots} = \mathrm{h}$

Valeur de n

$\tan 60° = \frac{h}{n}$

$n = \frac{h}{\tan 60°}$

$n = \frac{\mathbf{8{,}660\ 2\ldots}}{\tan 60°}$

$n = 5$

Valeur du rapport

$\frac{m}{n} = \frac{15}{5} = \mathbf{3}$

Conjecture:

Dans un triangle rectangle ayant un angle de 30˚, la hauteur relative à l'hypoténuse partage celle-ci en deux segments mesurant respectivement m et n unites, où $\mathbf{m} > \mathbf{n}$.

La valeur du rapport $\boldsymbol{\frac{m}{n}}$ est de __**3**__ dans ce type de triangle.

21 **Des angles complémentaires**

Exemple d'un raisonnement approprié

Mesure de l'angle **A** **angle aigu**	Mesure de l'angle **B** **son angle complémentaire**	Sinus de l'angle A **Sin A**	Cosinus de l'angle B **Cos B**	conclusion
20˚	70˚	Sin 20˚= 0,3420	Cos 70˚= 0,3420	***Sin A = Cos B*** Si ***A*** et ***B*** sont ***complémentaires***
30˚	60˚	Sin 30˚= 0,5	Cos 60˚= 0,5	
40˚	50˚	Sin 40˚= 0,6428	Cos 50˚= 0,6428	

Conjecture :

La valeur du sinus d'un angle aigu est égale à la valeur du cosinus de son angle complémentaire.

Page 36

1) **La boîte à fleurs**

$dp = \frac{(1{,}8+1{,}5+2{,}7)}{2} = \frac{6}{2} = 3$ Demi périmètre

$\sqrt{\left(3(3-1{,}8)(3-1{,}5)(3-2{,}7)\right)} = 1{,}27\ m^2$ Formule de Héron

Aire de la base triangulaire

$\frac{90}{100} \times 0{,}8 = 0{,}72\ m$ la boîte est remplie à 90% de sa capacité

$v = 1{,}27 \times 0{,}72 = 0{,}9144\ m^3$ Quantité de terre

$18\ ^{\$}/_{m^3} \times 0{,}9144 m^3 = 16{,}46\$$ Coût

Réponse : 16,46 $

Pages 38 à 47

1. a) 10,69 cm   c) 66,1˚   e) 44,8˚

   b) 15,92 cm   d) 47,5˚   f) 119,2˚

2. $m\overline{AB} = 11,85\ cm$ $m\overline{BC} = 22,27\ cm$

3. 21,93 cm

4. $m\overline{AC} = 2,25\ km$ $m\overline{BC} = 1,56\ km$

5. $m\overline{AB} = 16,39\ m$

6. $m\overline{AB} = 6,88\ m$ $m\overline{AC} = 9,02\ m$

7. $m\overline{AB} = 6,15\ cm$

8. $m\overline{AC} = 23,34\ cm$ $m\overline{AB} = 43,81\ cm$

9. **La hauteur de l'arbre**

1) $m\angle PQC = 180° - 36° = 144°$ Des angles adjacent dont les côtés extérieurs sont alignés sont supplémentaires.

2) $\frac{4}{\sin 8°} = \frac{m\overline{QC}}{\sin 28°}$ Loi des sinus

$m\overline{QC} = 13{,}49m$

3) $\frac{m\overline{QS}}{\sin 54°} = \frac{13{,}49}{\sin 90°}$ Loi des sinus

$m\overline{QS} = 10{,}91m$

4) $m\overline{RS} = 10{,}91 - 4 = 6{,}91$

5) $\frac{m\overline{CS}}{\sin 36°} = \frac{13{,}49}{\sin 90°}$ Loi des sinus

$m\overline{CS} = 7{,}93m$

6) $m\angle CRS = \tan^{-1}\left(\frac{7{,}93}{6{,}91}\right)$ Définition du rapport tangente

$= 48{,}9°$

Réponse:

Anne a raison ☐
Anne a tort ☒

Explication: Anne pense que la mesure de l'angle CRS sera de 44° (36° + 8°) alors que la mesure de l'angle CRS est de 48,9°.

10. **Une randonnée de ski de fond**

1) $\tan 67{,}5° = \frac{29}{m\overline{AF}}$

$m\overline{AF} = \frac{29}{\tan 67{,}5°}$

$m\overline{AF} = 12{,}01$

2) $m \measuredangle BAE = 90° - 67{,}5° = 22{,}5°$

3) $\frac{16}{\sin 50} = \frac{m\overline{BE}}{\sin 22{,}5}$

$m\overline{BE} = 7{,}99$

4) 12,01 + 16 + 7,99 = 36

Réponse: <u>36 km</u>

11. **La toiture**

1) $m\overline{AD}^2 = 0{,}81 \times 1{,}44$

$m\overline{AD} = 1{,}08\ m$

Dans le triangle rectangle ODB, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

2) m∠ O = $\tan^{-1}\left(\frac{1{,}08}{0{,}81}\right)$

= 53,13°

Définition de tangente dans le triangle OAD.

3) $\sin 53{,}13° = \frac{m\overline{BD}}{2{,}25}$

$m\overline{BD} = 1{,}8\ m$

Définition de sinus dans le triangle OBD.

4) $m\overline{BC} = 1{,}08\ m$

$m\overline{DC} = 1{,}44\ m$

Les côtés opposés du rectangle BCD sont isométriques

5) $1{,}44^2 = 1{,}08 \times m\overline{CE}$

$m\overline{CE} = 1{,}92\ m$

Dans le triangle rectangle BDE, la mesure de la hauteur issue du sommet de l'angle droit est moyenne proportionnelle entre les mesures des deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

6) $m\overline{BE}$ = 1,08 + 1,92 = 3 m

7) $m\angle E = \sin^{-1}\left(\frac{1{,}8}{3}\right) = 36{,}9°$ Définition de sinus dans le triangle BDE.

Réponse: La mesure de l'angle d'élévation du versant gauche : 53,1˚

La mesure de l'angle d'élévation du versant droit: 36,9˚

La longueur du versant $\overline{BE}$: 3 mètres