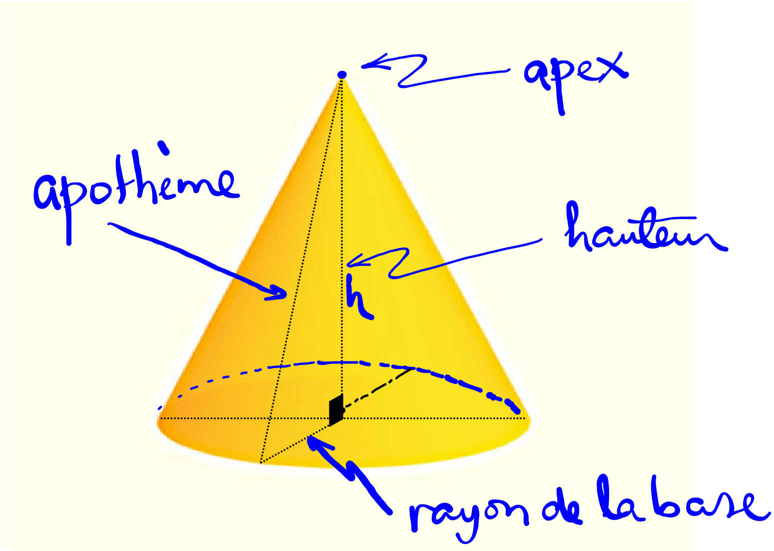
6 L'aire et le volume de solides

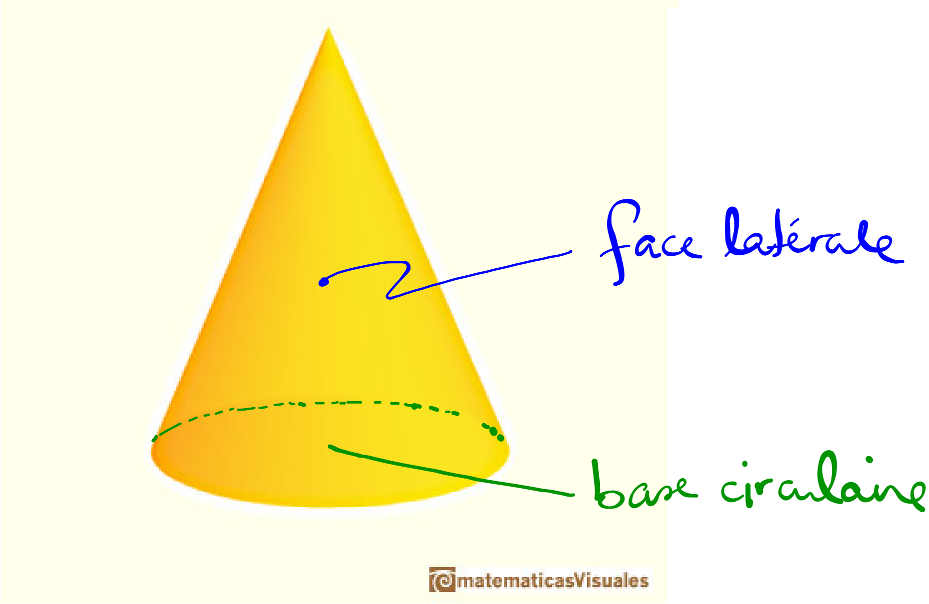
L'aire des corps ronds

L'aire d'un cône droit

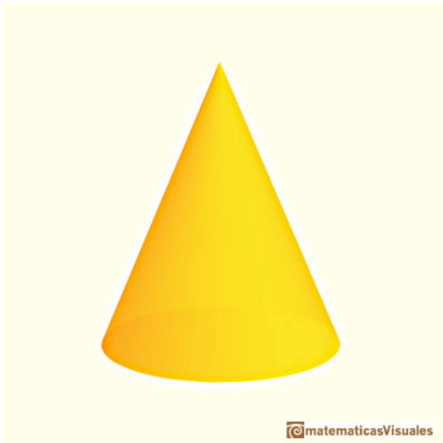
Il existe plusieurs types de cônes. Nous considérerons seulement les cônes à base circulaires droits, appelés les cônes de révolution.

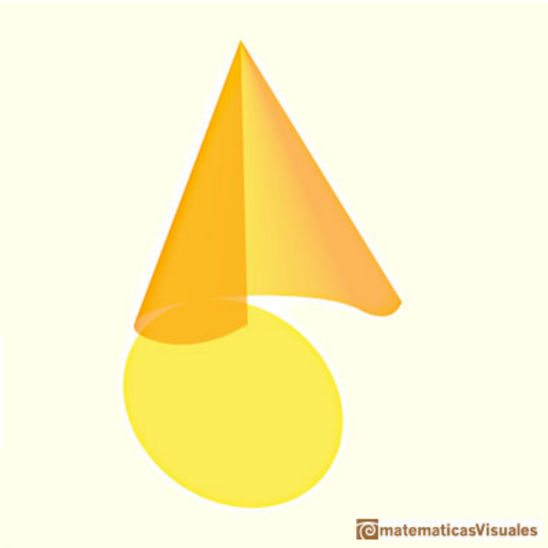
Les attributs d'un cône

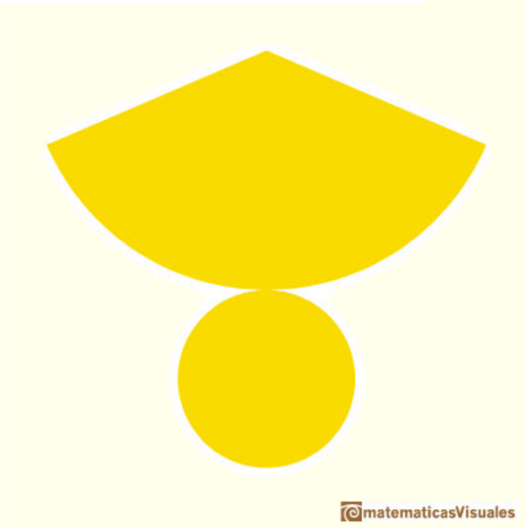




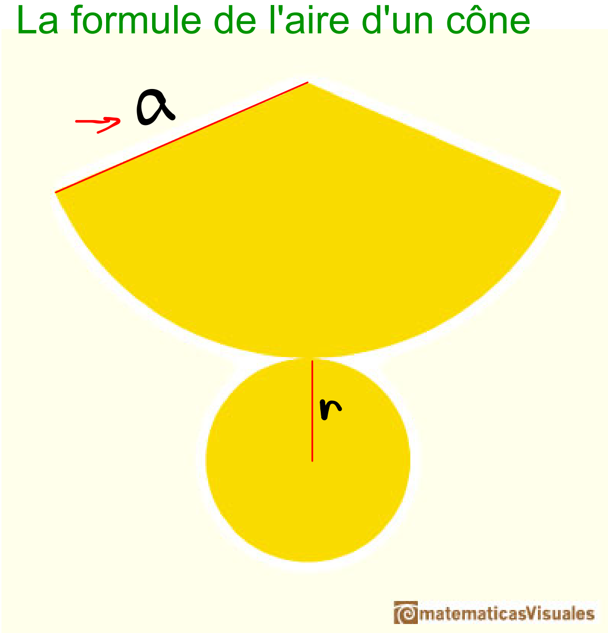
Le cône développé

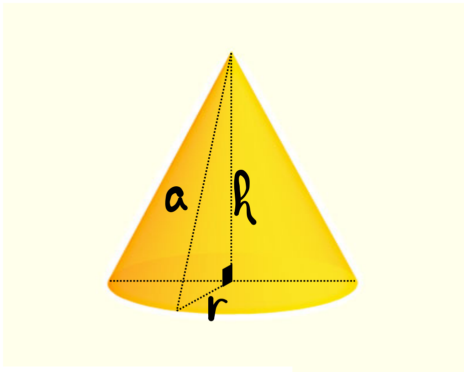




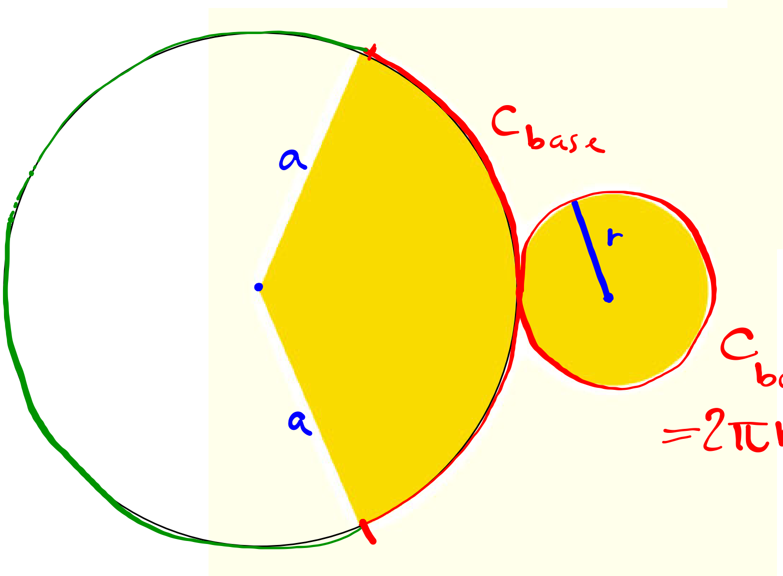


La formule de l'aire d'un cône





La formule de l'aire d'un cône



$$\frac{\text{partie}}{\text{tout}} : \frac{C_{base}}{C_{grand\ cercle}} = \frac{A_{secteur}}{A_{grand\ cercle}} \leftarrow A_{lat.\ cône}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}\cancel{\pi} r}{\cancel{2}\cancel{\pi} a} = \frac{A_{lat.\ cône}}{\pi a^2}$$

$$\frac{r}{a} = \frac{A_{lat.\ cône}}{\pi a^2}$$

$$\frac{\pi a^2 \cdot r}{a} = \frac{A_{lat.\ cône} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a}}$$

$$\frac{\pi \cancel{a^2} r}{\cancel{a}} = A_{lat.\ cône}$$

$$\pi r a = A_{lat.\ cône}$$

$$\text{Aire totale du cône} = A_{latérale} + A_{base}$$

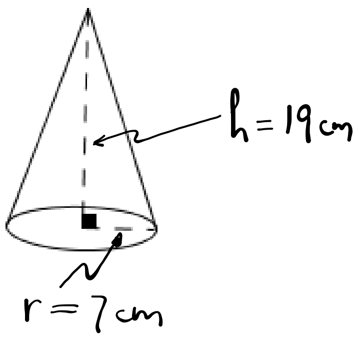
$$= \pi r a + \pi r^2 \quad (1)$$

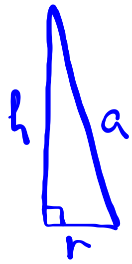
$$= \pi r (a + r) \quad (2)$$

Le calcul de l'aire d'un cône

$$\text{Aire totale} = \underbrace{\pi r a}_{A_{lat.}} + \underbrace{\pi r^2}_{A_{base}}$$

Exemple 1 : Calculer l'aire totale du cône suivant :





$$r^2 + h^2 = a^2$$

$$(7\,cm)^2 + (19\,cm)^2 = a^2$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{410\ cm^2}$$

$$a = \sqrt{410}\ cm$$

$$\approx 20{,}25\ cm.$$

$$A_{t.\,cône} = \pi r a + \pi r^2$$

$$\approx \pi \cdot 7\,cm \cdot 20{,}25\,cm + \pi (7\,cm)^2$$

$$\approx 141{,}74\pi\ cm^2 + 49\pi\ cm^2$$

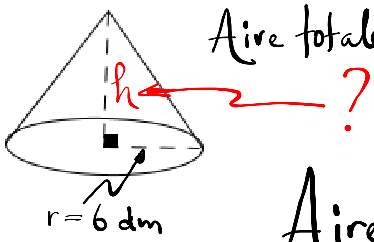
$$\approx 190{,}74\pi\ cm^2$$

$$\approx 599{,}22\ cm^2$$

$\pi = 3{,}14159...$

Le calcul de l'aire d'un cône

Exemple 2 : Déterminer la mesure manquante



Aire totale $= 96\pi \text{ dm}^2$.

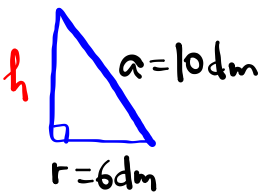
$$\text{Aire totale cône} = \pi r a + \pi r^2$$

$$96\pi \text{ dm}^2 = \pi \cdot 6\text{dm} \cdot a + \pi (6\text{dm})^2$$

$$\begin{array}{rcl} 96\pi \text{dm}^2 & = & 6\pi a \text{ dm}^2 + 36\pi \text{dm}^2 \\ -36\pi \text{ dm}^2 & & \qquad -36\pi \text{ dm}^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{60\pi \text{ dm}^2}{6\pi} = \frac{\cancel{6\pi} \cdot a}{\cancel{6\pi}} \text{ dm}^2$$

$$a = 10 \text{ dm}.$$



$$r^2 + h^2 = a^2$$

$$(6\text{dm})^2 + h^2 = (10 \text{ dm})^2$$

$$\sqrt{h^2} = \sqrt{(10\text{dm})^2 - (6\text{ dm})^2}$$

$$h = \sqrt{100\text{dm}^2 - 36\text{dm}^2}$$

$$= \sqrt{64\text{dm}^2}$$

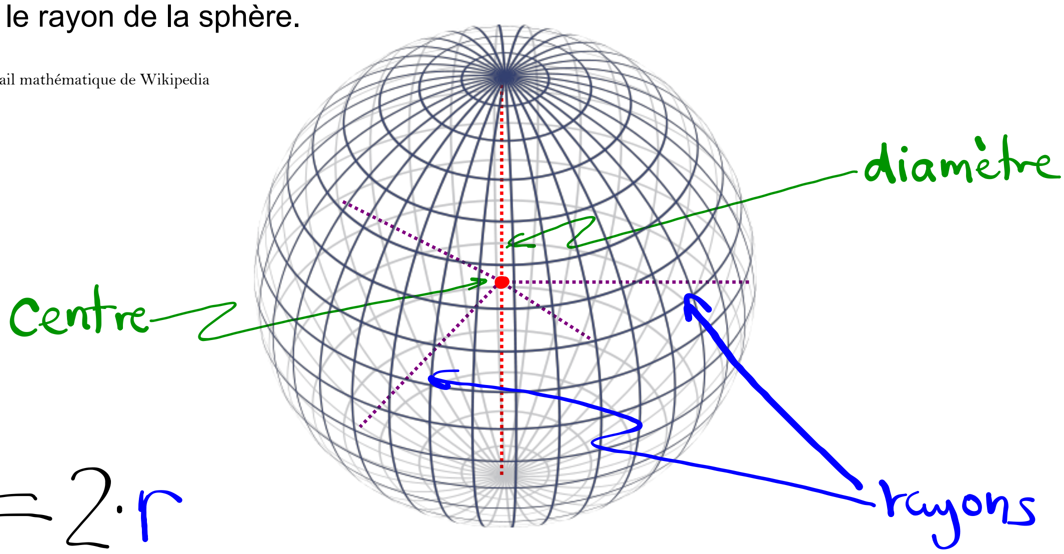
$$= 8 \text{ dm}$$

La hauteur est de 8 dm.

L'aire d'une sphère

En géométrie dans l'espace, une sphère est une surface constituée de tous les points situés à une même distance d'un point appelé centre. La valeur de cette distance au centre est appelée le rayon de la sphère.

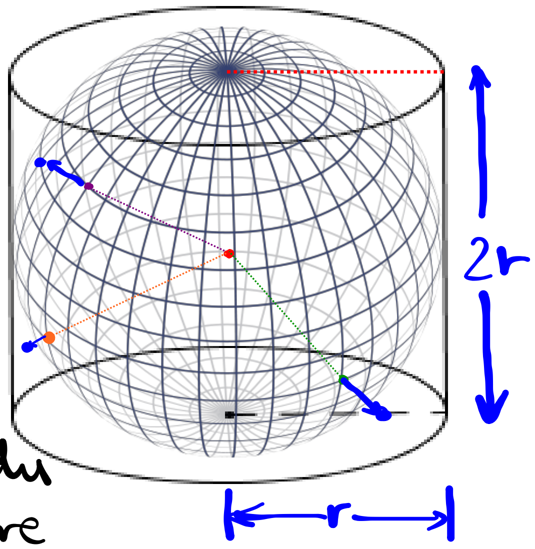
Source : Le portail mathématique de Wikipedia



$$d = 2 \cdot r$$

La formule de l'aire d'une sphère

Ainsi, l'aire du cylindre = l'aire de la sphère



Aire sphère = Aire latérale du cylindre

$= \underset{\text{base}}{\text{Circonférence}} \times \text{hauteur du cylindre}$

$= 2\pi \cdot r \times 2r$

$= 4\pi r^2$

$$\boxed{\text{Aire sphère} = 4\pi r^2}$$

Le calcul de l'aire d'une sphère

Exemple 1 : Calculer l'aire d'une sphère ayant un diamètre mesurant 8 dm.

$$d = 2r$$
$$8\,dm = 2r$$
$$\Rightarrow r = 4\,dm$$

$$A_{sphère} = 4\pi r^2$$
$$= 4\pi (4\,dm)^2$$
$$= 4\pi \cdot 16\,dm^2$$
$$= 64\pi\,dm^2$$
$$(\approx 201{,}06\,dm^2)$$

Le calcul de l'aire d'une sphère

Exemple 2 : Calculer le rayon d'une sphère d'une aire de $225\pi\,mm^2$.

$$A_{sphère} = 4\pi r^2$$

$$\frac{225\cancel{\pi}\,mm^2}{4\cancel{\pi}} = \frac{\cancel{4\pi}\, r^2}{\cancel{4\pi}}$$

$$56,25\,mm^2 = r^2$$

$$\sqrt{56,25\,mm^2} = \sqrt{r^2}$$

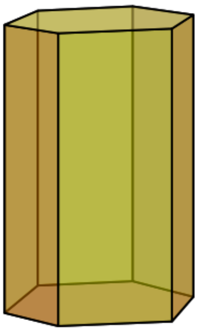
$$7,5\,mm = r$$

Le volume des solides

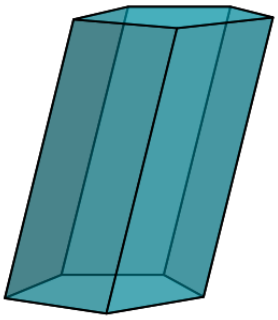
Le volume des prismes et cylindres

Un prisme est un polyèdre constitué par deux bases polygonales superposables situées dans deux plans parallèles et par des parallélogrammes joignant les bases.

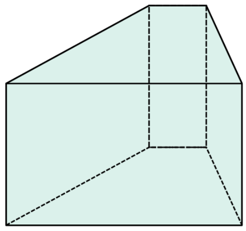
Exemple de prismes :



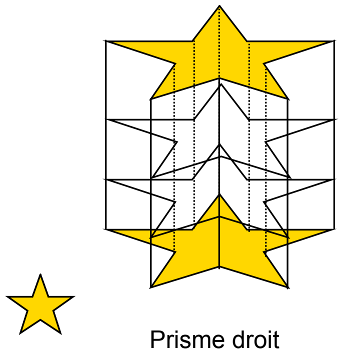
Prisme droit
à bases hexagonales
régulières



Prisme oblique
à bases pentagonales
régulières



Prisme droit
à bases trapèzes
Parallépipède quelconque



Prisme droit
à bases décagonales
régulières convexes

$$V_{prisme} = A_{base} \cdot H_{prisme}$$

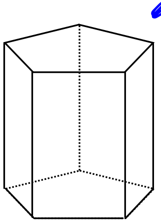
$$\boxed{V_{prisme} = A_b \cdot H}$$

Le volume des prismes et du cylindre

Un prisme à bases régulières dont on augmente le nombre de côtés des bases s'approche de plus en plus d'un cylindre. Ainsi, on peut considérer que les cylindres sont des solides cousins des prismes.

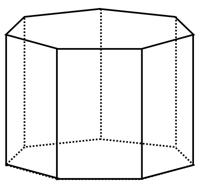
De prismes à cylindres...

14 côtés



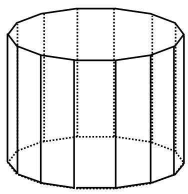
Prisme droit
à bases pentagonales
régulières

...



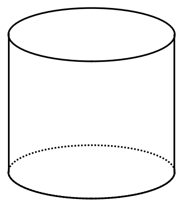
Prisme droit
à bases heptagonales
régulières

...

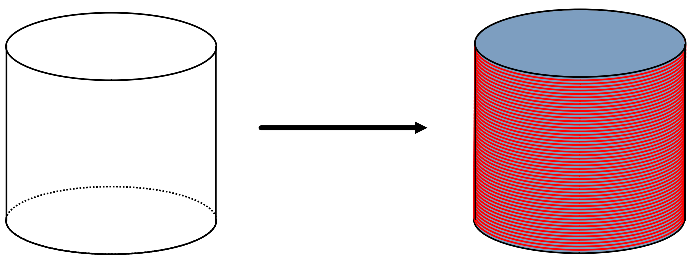


Prisme droit
à bases tétradécagonales
régulières

...



cylindre



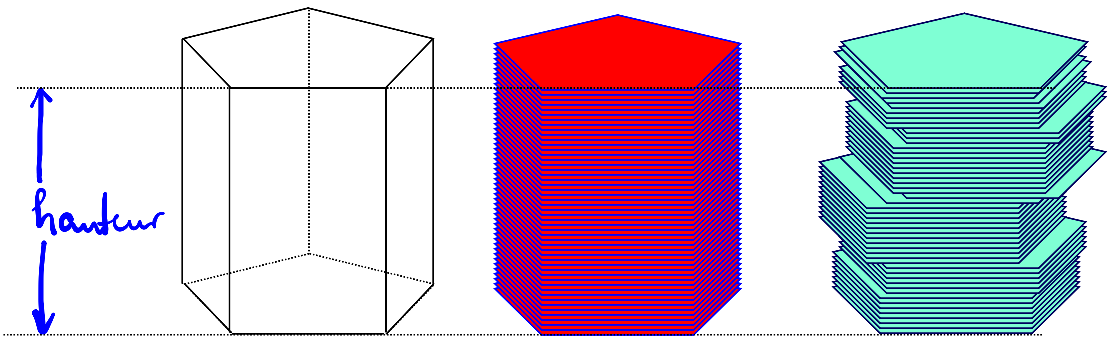
$$V_{cylindre} = A_b \cdot H$$

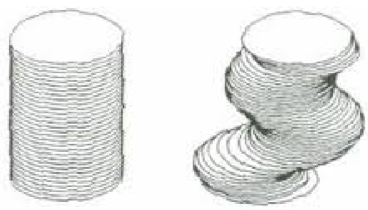
$$\text{Or, } A_b = \pi r^2$$

Le volume des solides

Le volume des prismes et cylindres

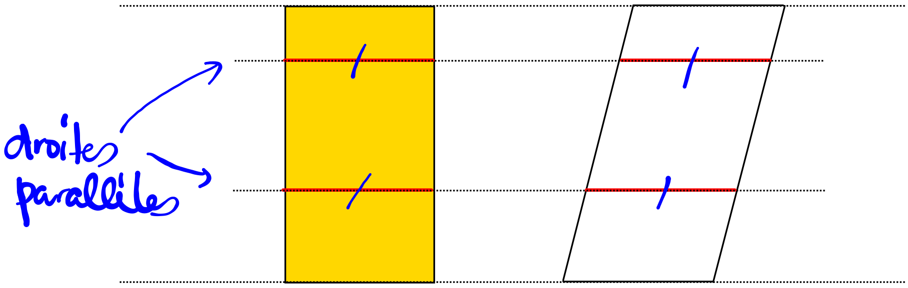
On peut considérer un prisme comme étant un empilement de surfaces isométriques à la base. Cet empilement peut être droit ou non...





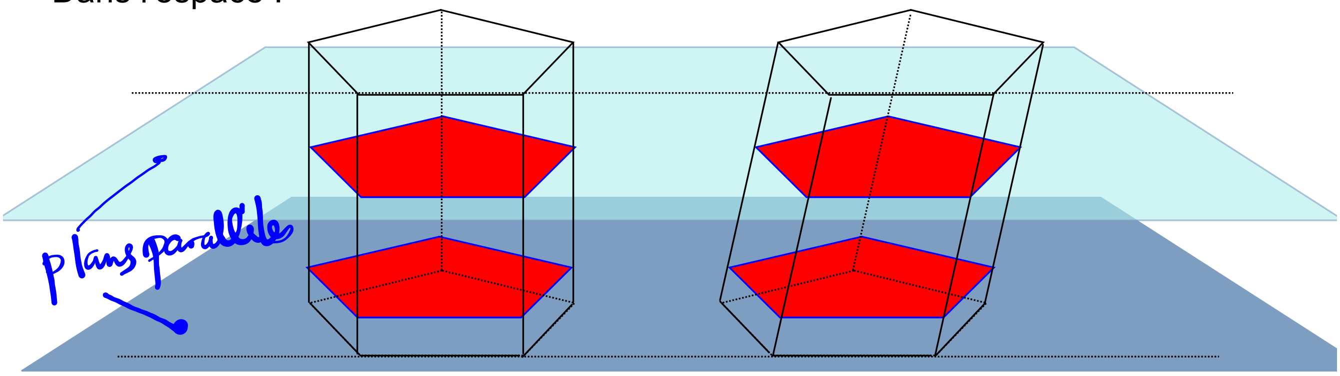
Le principe de Cavalieri

Dans le plan :



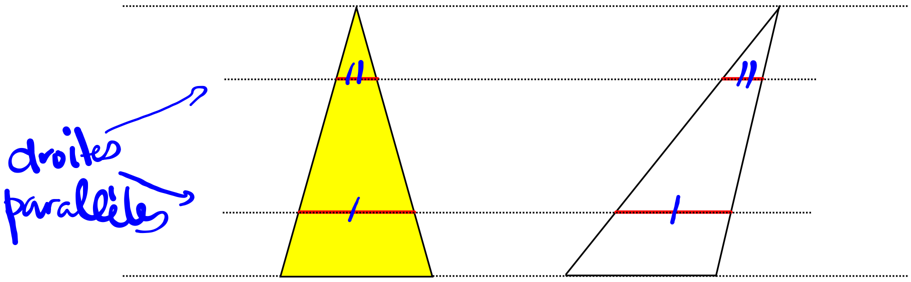
Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)

Dans l'espace :



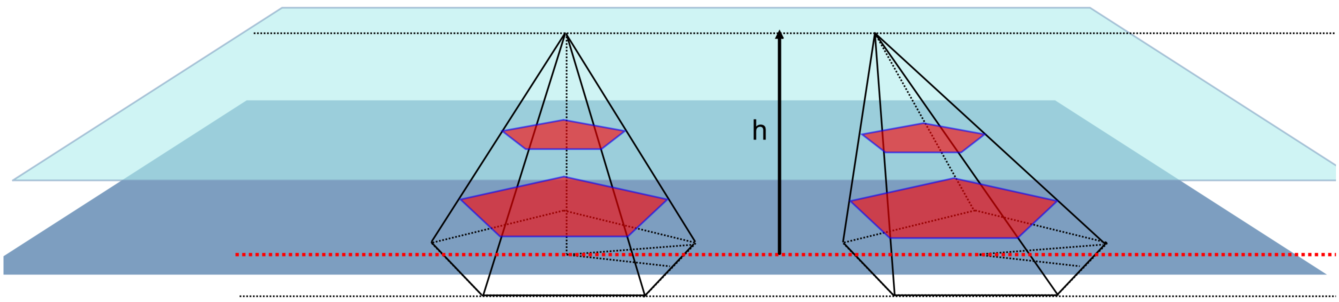
Le principe de Cavalieri

Dans le plan :



Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647)

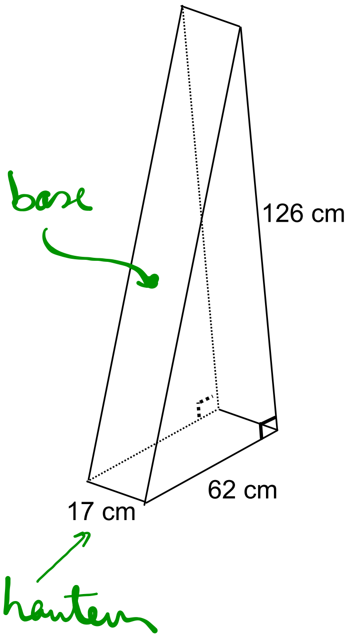
Dans l'espace :



Ainsi, pour les prismes, pyramides, cylindres et cônes (qu'ils soient droits ou obliques), le volume ne dépend que de l'aire de sa base et de sa hauteur.

Le calcul du volume d'un prisme

Exemple : Calculer le volume de ce prisme.



$$V_{prisme} = A_b \cdot H$$

$$= A_{triangle} \cdot H$$

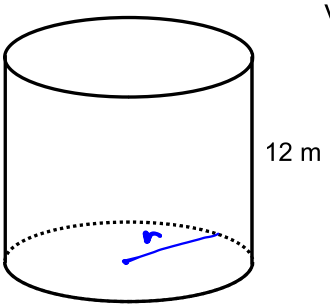
$$= \frac{b \cdot h}{2} \cdot H$$

$$= \frac{62\,cm \cdot 126\,cm}{2} \cdot 17\,cm$$

$$\boxed{V_{prisme} = 66\,402\ cm^3}$$

Le calcul du volume d'un cylindre

Exemple : Calculer le diamètre du cylindre suivant :



V = 300π m³

≈ 942,48 m³

$$V_{cylindre} = A_b \cdot H$$

$$= \pi r^2 \cdot H$$

$$\frac{300\cancel{\pi}\, m^3}{\cancel{\pi} \cdot 12m} = \frac{\cancel{\pi} \cdot r^2 \cdot \cancel{12}m}{\cancel{\pi} \cdot \cancel{12}m}$$

$$25\, m^2 = r^2$$

$$\Longrightarrow r = 5m.$$

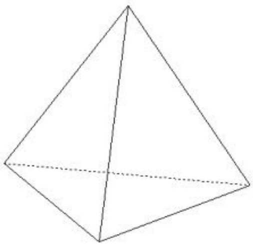
$\boxed{\text{Le diamètre vaut donc 10 m.}}$

Le volume des solides

Le volume des pyramides et du cône

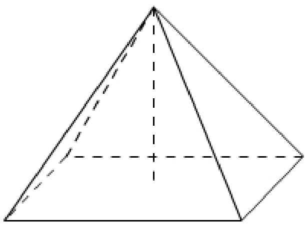
Une pyramide est un polyèdre constitué d'une base polygonale et de faces latérales triangulaires reliées à un sommet, nommé apex.

Exemple de pyramides :

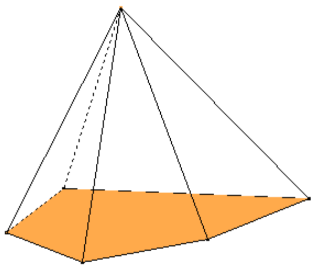


Pyramide régulière à base triangulaire

tétraèdres

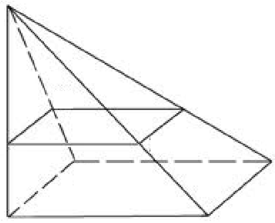


Pyramide à base carrée



Pyramide quelconque

à base pentagonale

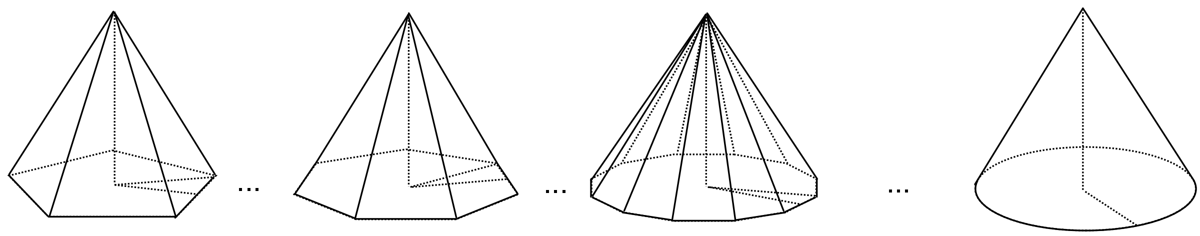


Pyramide oblique à base carrée

Le volume des pyramides et du cône

Tout comme pour les prismes et le cylindre, une pyramide à base régulière dont on augmente le nombre de côtés de la base s'approche de plus en plus d'un cône. Ainsi, on peut considérer que les cônes sont des solides cousins des pyramides.

De pyramides à cône...

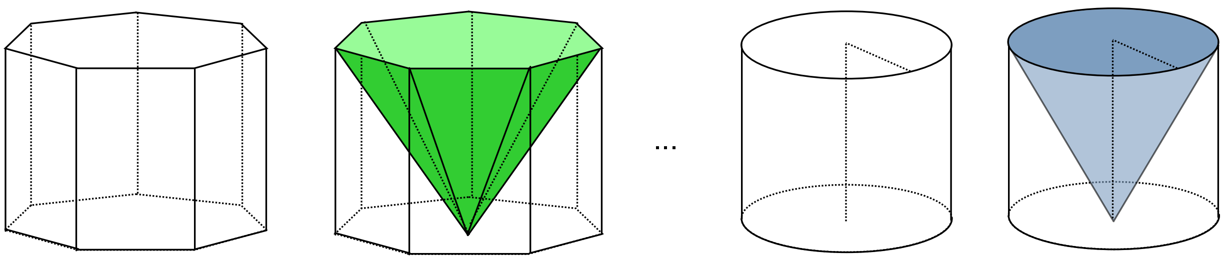


Pyramide droite à base pentagonale régulière

Pyramide droite à base heptagonale régulière

Pyramide droite à base dodécagonale régulières

cône



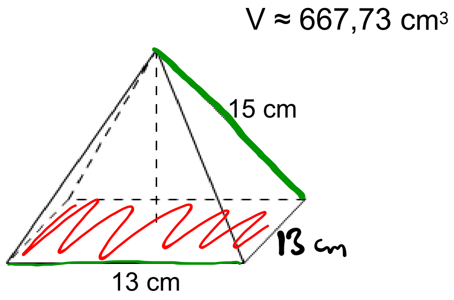
$$V_{pyramide} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

$$V_{cône} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

$$A_b = \pi r^2$$

Le calcul du volume d'une pyramide

Exemple : Calculer la hauteur de la pyramide droite à base carrée suivante :



$$V_{pyramide} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

$$= \frac{c^2 \cdot H}{3}$$

$$3 \cdot 667{,}73\,cm^3 \approx \frac{(13\,cm)^2 \cdot H}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}$$

$$\frac{2003{,}19\,cm^3}{169\,cm^2} \approx \frac{\cancel{169\,cm^2} \cdot H}{\cancel{169\,cm^2}}$$

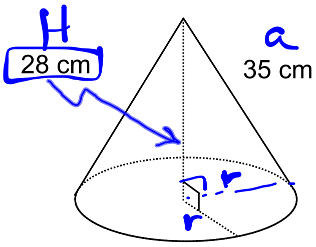
$$\frac{cm^3}{cm^2} = \frac{\cancel{cm} \cdot \cancel{cm} \cdot cm}{\cancel{cm} \cdot \cancel{cm}}$$

$$11{,}85\,cm \approx H$$

$$\boxed{\text{La hauteur de la pyramide est d'environ } 11{,}85\,cm.}$$

Le calcul du volume d'un cône

Exemple : Calculer le volume de ce cône droit :



Par Pythagore :

$(28\,cm)^2 + r^2 = (35\,cm)^2$

$r^2 = (35\,cm)^2 - (28\,cm)^2$

$\Rightarrow r = \sqrt{(35\,cm)^2 - (28\,cm)^2}$

$= 21\,cm.$

$$V_{cône} = \frac{A_b \cdot H}{3}$$

$$= \frac{\pi r^2 \cdot H}{3}$$

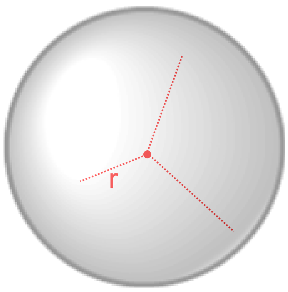
$$= \frac{\pi (21\,cm)^2 \cdot 28\,cm}{3}$$

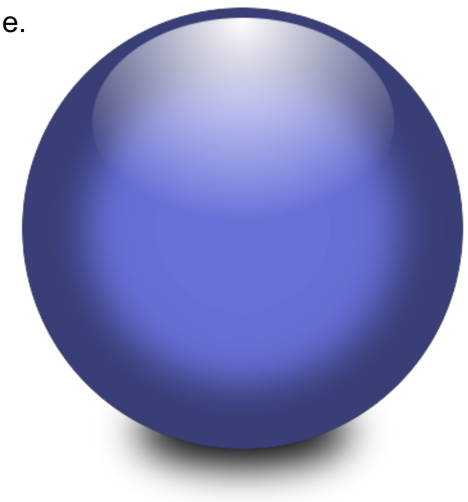
$$\underline{\underline{V_{cône} = 4116\pi\ cm^3.}}$$

Le volume d'une boule

En géométrie, une boule est un solide délimité par une sphère. Ses points sont donc tous ceux dont la distance au centre de la sphère est inférieure ou égale à son rayon.

La sphère est donc la coquille extérieure de la boule.





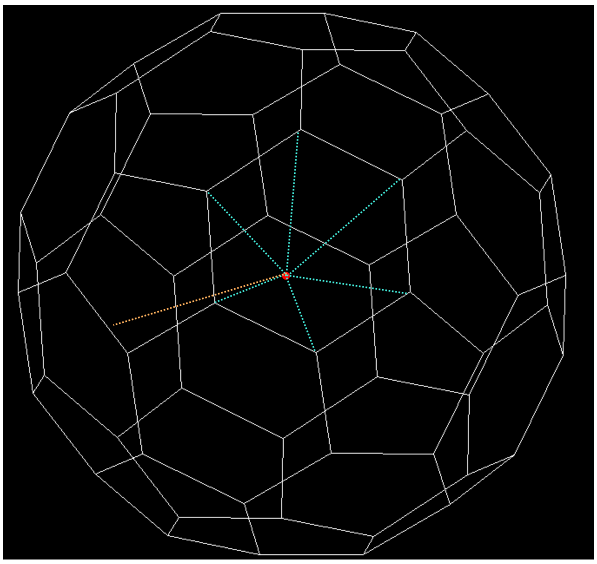
Vers la formule du volume d'une boule...

Une des astuces pour construire la formule du volume d'une boule consiste à calculer le volume de solides qui s'approchent de la boule et de déduire ce qui se passerait dans ce cas.

1er exemple : Le ballon de soccer (ou icosaèdre tronqué)

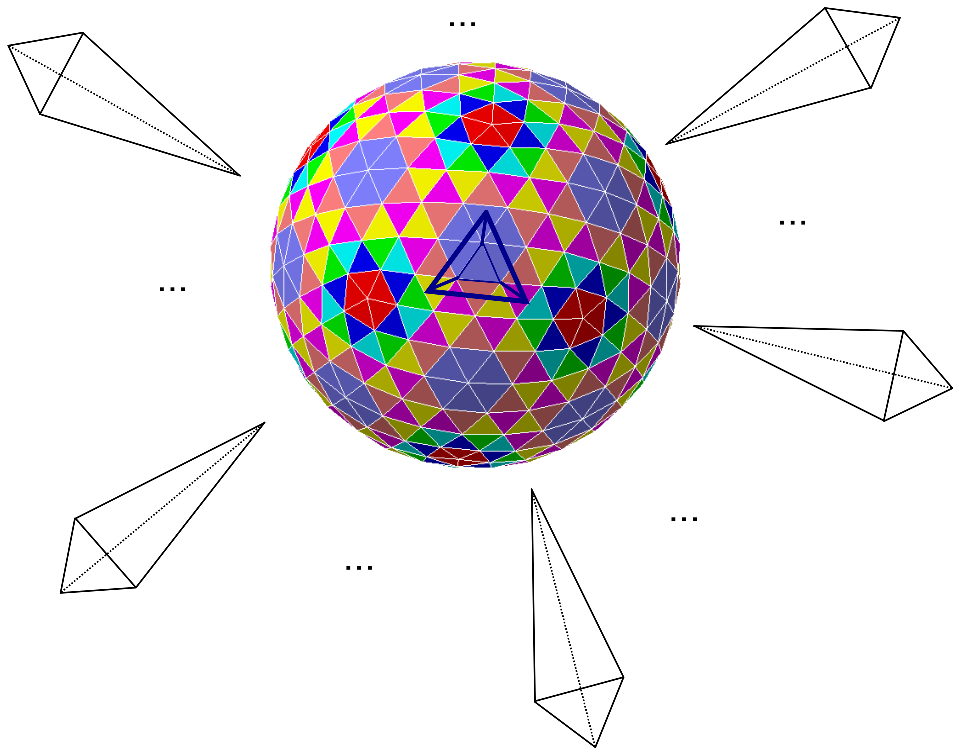
Chacune des faces latérales de ce solide, pentagone ou hexagone, est la base d'une pyramide dont l'apex est le centre du solide.

Les hauteurs des pyramides se rencontrent toutes à l'apex.

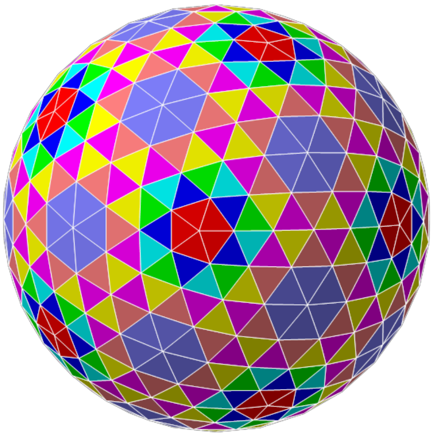


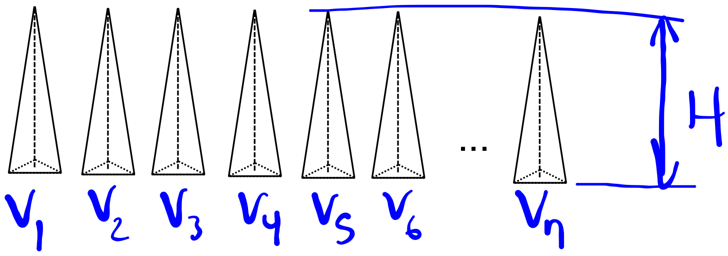
Vers la formule du volume d'une boule...

2e exemple : La quasi-sphère de période 6 de l'icosaèdre tronqué



Vers la formule du volume d'une boule...



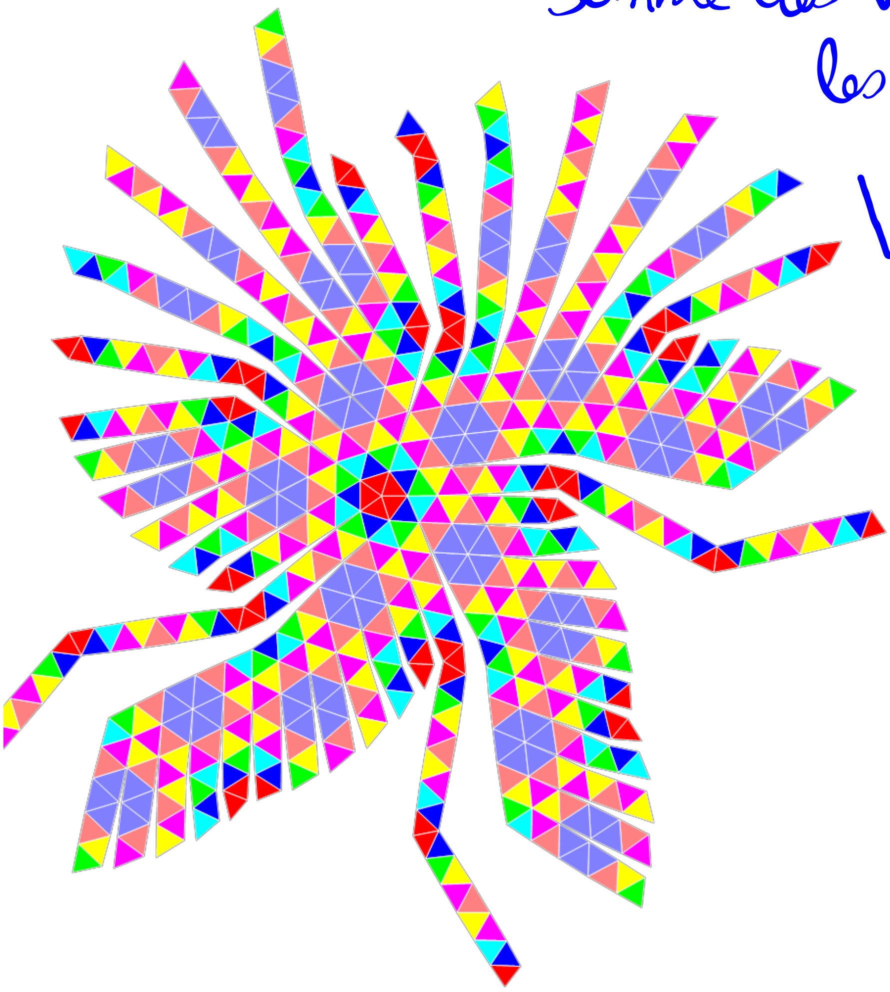


Le volume de la boule est la somme des volumes de toutes les pyramides.

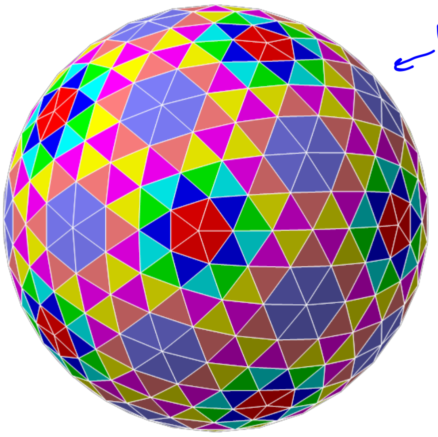
$$V_{boule} = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$= \frac{A_{b_1} \cdot H}{3} + \frac{A_{b_2} \cdot H}{3} + \dots$$

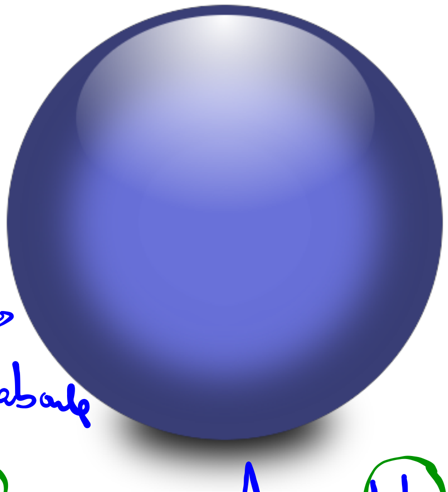
$$+ \frac{A_{b_n} \cdot H}{3}$$



Vers la formule du volume d'une boule | suite et fin



hauteur de pyramides



rayon de la boule

$$V_{quasi\text{-}sphère} = \frac{A_{b_1} \cdot H}{3} + \frac{A_{b_2} \cdot H}{3} + \dots + \frac{A_{b_n} \cdot H}{3}$$

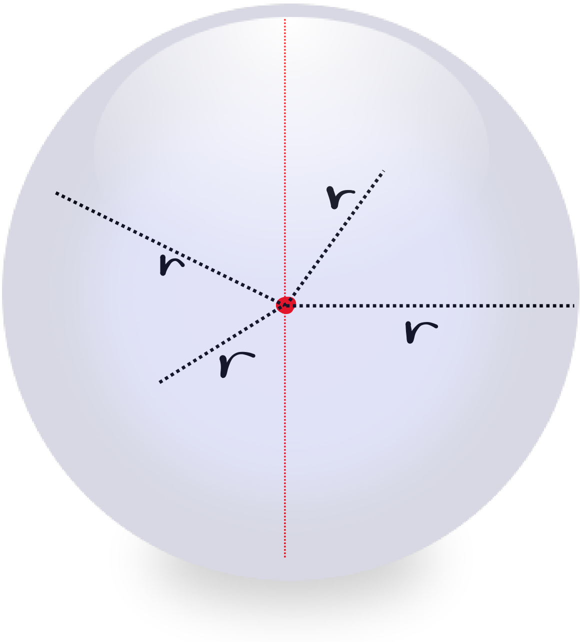
$$= \frac{H}{3}\underbrace{\left(A_{b_1} + A_{b_2} + \dots + A_{b_n}\right)}_{A_{latérale\ de\ la\ quasi\text{-}sphère}}$$

$$= \frac{r}{3}\left(A_{sphère}\right)$$

$$= \frac{r}{3} \cdot 4\pi r^2$$

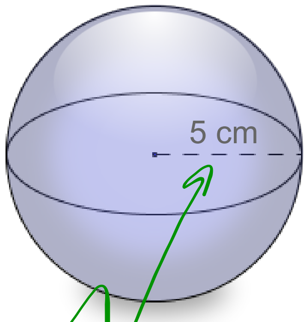
$$= \frac{4\pi r^3}{3}$$

La formule du volume d'une boule



$$V_{boule} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Exemple : Calculer le volume de cette boule :



$r = 5\ cm$

$$V_{boule} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$= \frac{4\pi \cdot (5\ cm)^3}{3}$$

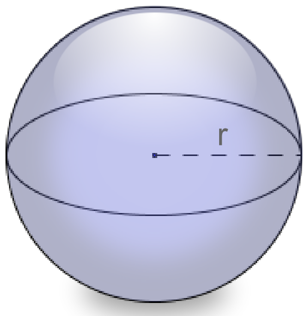
$$= \frac{4 \cdot \pi \cdot 125\ cm^3}{3}$$

$$= \frac{500\pi}{3}\ cm^3$$

$$\approx 523{,}60\ cm^3$$

Exemple : Calculer le rayon de cette boule :

$$V_{boule} = \frac{4\pi r^3}{3}$$



$V_{boule} = 20580\ mm^3$

$$3 \cdot 20580\,mm^3 = \frac{4\pi r^3}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}$$

$$\frac{3 \cdot 20580\,mm^3}{4\pi} = \frac{\cancel{4\pi} r^3}{\cancel{4\pi}}$$

$$\sqrt[3]{4913{,}11\,mm^3} \approx \sqrt[3]{r^3}$$

$$r = \sqrt{4913{,}11\,mm^3}$$

$$\approx 17\,mm.$$

Le rayon mesure 17 mm.

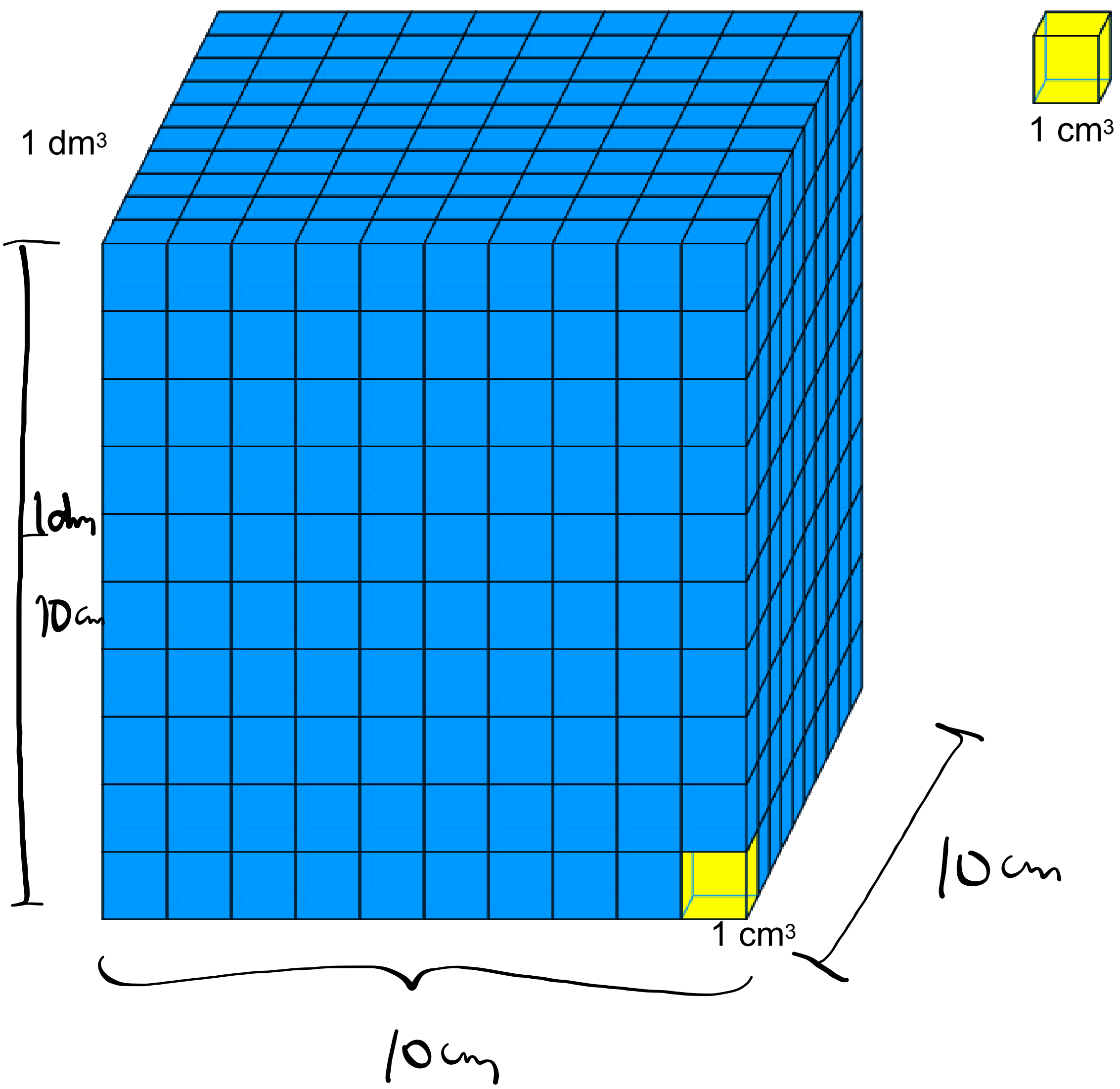
Les mesures de volume et de capacité

Les unités de mesures de volume du système international (SI)

Le système international d'unités de mesure est un système décimal, c'est-à-dire que pour convertir une unité de mesure de longueur il faut multiplier ou diviser le nombre par une puissance de 10.

Ainsi, le volume étant une mesure tridimensionnelle, il faut multiplier ou diviser chaque mesure pour chacune des dimensions par 10. Cela correspond donc à une puissance de 1000 car $10^3 = 1000$.

Exemple : Il y a 1000 cm^3 dans 1 dm^3.



Les unités de mesures de volume du système international (SI)

Conversion d'unités de mesure de volume (SI)						
km³	hm³	dam³	m³	dm³	cm³	mm³

1000 1000 1000 1000 1000 1000

Conversion d'unités de volume

Pour convertir efficacement des unités de mesure de volume tout en limitant le risque d'erreur, on peut utiliser un tableau subdivisé...

Conversion d'unités de mesure de volume (SI)																				
km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³		
									c	d	u									
											7,	4								
											7	4	0	0	0	0	0,			

Exemple 1 : Convertir 7,4 m³ en cm³.

$$7{,}4\,m^3 = 7\,400\,000\ cm^3$$

Exemple 2 : Convertir 0,000 56 km^3 en dm^3.

Conversion d'unités de mesure de volume (SI)																				
km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
		0,	0	0	0	5	6													
						5	6	0	0	0	0	0	0	0,						

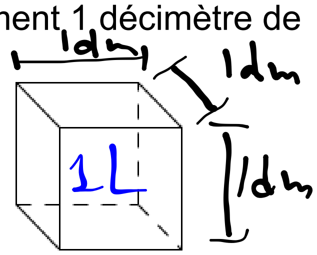
$$0{,}000\ 56\ km^3 = 560\ 000\ 000\ dm^3$$

Les unités de capacité et leur relation aux unités de volume

Les unités de volume (mm^3, cm^3, ...) servent à mesurer l'espace qu'occupe un objet solide. Les unités de capacité, quant à elles, servent à mesurer l'espace qu'occupe des substances liquides, gazeuses ou granuleuses.

L'unité de référence est le litre.

Le litre est défini comme la capacité d'un cube ayant exactement 1 décimètre de coté. Ainsi, on dira que 1 litre correspond à 1 dm^3.



Symboliquement, on écrit :

$$1\ L \underset{\approx}{\triangleq} 1\ dm^3$$

Conversion d'unités de capacité et correspondance d'unités de volume (SI)		
kl	L	ml
m^3	dm^3	cm^3

1000 1000

Exemple 1 : Convertir 0,001 28 km^3 en L.

Conversion d'unités de mesure de volume ou de capacité (SI)																				
km^3			hm^3			dam^3			m^3 (kl)			dm^3 (L)			cm^3 (ml)			mm^3		
		0,	0	0	1	2	8													

1 2 8 0 0 0 0 0 0 0,

Exemple 2 : Convertir 12300 cm^3 en L.

Conversion d'unités de mesure de volume ou de capacité (SI)																				
km^3			hm^3			dam^3			m^3 (kl)			dm^3 (L)			cm^3 (ml)			mm^3		
													1	2	3	0	0			

Dans la page suivante, une série de tableaux vierges a été mise à votre disposition si vous désirez en imprimer.

ex1 $0{,}00128\ km^3 \triangleq 1280\,000\,000\ L$

ex2. $12300\ cm^3 \triangleq 12{,}3\ L$.

Conversion d’unités de mesure de volume ou de capacité (SI)

km^3			hm^3			dam^3			m^3			dm^3			cm^3			mm^3		
											kl	hl	dal	L	dl	cl	ml			