1. Les nombres réels et leurs propriétés

Les lois des exposants

Produit de puissances de même base

Le produit de puissances de même base est la base affectée de la somme des exposants des puissances.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ex. : $5^3 \cdot 5^6$

$= 5 \times 5 \times 5 \cdot 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$

$= 5^9$

$= 5^{3+6}$

Rappel : $2^{-4} = \frac{1}{2^4}$

Ex₂ : $8^3 \cdot 8^{-5}$

$= 8 \times 8 \times 8 \cdot \frac{1}{8^5}$

$= \cancel{8} \times \cancel{8} \times \cancel{8} \cdot \frac{1}{\cancel{8} \times \cancel{8} \times \cancel{8} \times 8 \times 8}$

$= \frac{1}{8^2}$

$= 8^{-2}$

8^{3-5}

Quotient de puissances de même base

Le quotient de puissances de même base est la base affectée de la différence des exposants des puissances.

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

Si $a \neq 0$

$5 \div 2 = \frac{5}{2}$

Ex.1:

$$7^3 \div 7^6 = \frac{7^3}{7^6}$$

$$= \frac{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{7}}{\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{7}\cdot 7\cdot 7\cdot 7}$$

$$= \frac{1}{7^3}$$

$$= 7^{-3} = 7^{3-6}$$

Ex2.

$$9^{11} \div 9^{-4}$$

$$= \frac{9^{11}}{9^{-4}}$$

$$= \frac{9^{11}}{\frac{1}{9^4}}$$

$9^{-4} \rightarrow \frac{1}{9^4}$

$$= 9^{11}\cdot 9^4$$

$$= 9^{15}$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$9^{11} \div 9^{-4} = 9^{11--4}$$

$$= 9^{15}$$

$$9^{11} \div \frac{1}{9^4}$$

$$= 9^{11} \times 9^4$$

$$= 9^{15}$$

Puissance d'une puissance

La puissance d'une puissance est la base affectée du produit des exposants.

$$\left(a^{n}\right)^{m} = a^{n \cdot m}$$ Ex. : $\left(4^{3}\right)^{5} = 4^{3 \cdot 5}$

$= 4^{15}$

$4^{3} \times 4^{3} \times 4^{3} \times 4^{3} \times 4^{3}$

La notation scientifique

Les composantes d'un nombre en notation scientifique

La notation scientifique est surtout utilisée pour lire et écrire de très grands et de très petits nombres. Ces nombres ont deux composantes, la mantisse et la puissance de 10 indiquant l'ordre de grandeur du nombre.

Exemple 1 :

La vitesse de la lumière est d'environ 299 800 000 m/s.

Mantisse

Ordre de grandeur
(puissance de 10)

$2{,}998 \times 10^{8}$ m/s

1er chiffre
significatif non nul

Autres chiffres
significatifs conservés

Si le nombre initial est supérieur à 1,
l'exposant est positif.

Exemple 2:

10^{-1}

La taille d'un électron est d'environ 0,00000000000000282 m.

15 1

Mantisse

Ordre de grandeur
(puissance de 10)

$2,82 \times 10^{-15}$ m

1er chiffre
significatif non nul

Autres chiffres
significatifs conservés

Si le nombre initial est inférieur à 1,
l'exposant est négatif.

Les calculs avec des nombres en notation scientifique

Les multiplications et divisions impliquant des nombres en notation scientifique se font séparément pour les mantisses et les puissances de 10.

1. Regrouper les mantisses ensemble et les puissances de 10 ensemble (par commutativité).
2. Effectuer les calculs séparément pour les mantisses et les puissances de 10.
3. Exprimer le résultat en notation scientifique.

Exemple 1 : $\underbrace{3,71}\times\underbrace{10^{11}}\cdot\underbrace{2,01}\times\underbrace{10^{5}}$

$= 3,71\cdot 10^{11}\cdot 2,01\cdot 10^{5}$

$= 3,71\cdot 2,01\times\cdot 10^{11}\cdot 10^{5}$

$= 7,4571\cdot 10^{16}$

Propriété

$\boxed{a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}}$

Exemple 2 : $\dfrac{8{,}1\times10^{-9}}{2{,}7\times10^{-21}}$

$$= \frac{8{,}1}{2{,}7} \times \frac{10^{-9}}{10^{-21}}$$

$$= 3 \times 10^{-9 - -21}$$

$$= 3 \times 10^{12}$$

Propriété

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

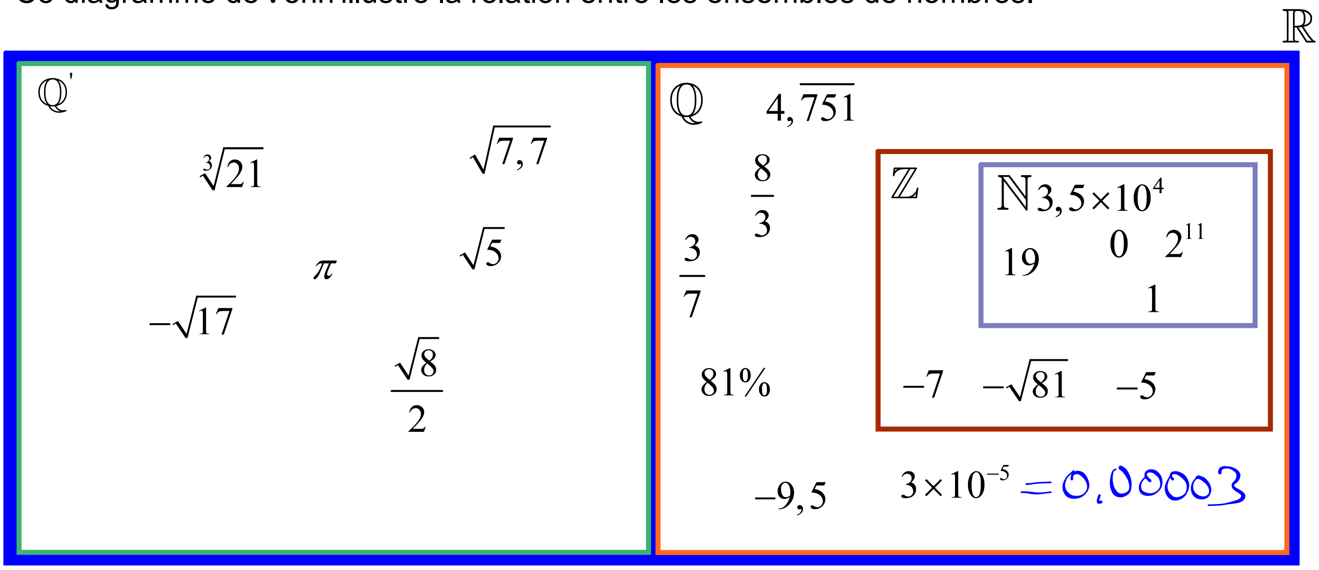
Les ensembles de nombres

Le tableau suivant présente les ensemble de nombres de façon détaillée.

Ensemble de nombres (symbole)	Définition	Notation décimale
Nombres naturels ($\mathbb{N}$)	Nombres qui servent à dénombrer : $\{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.	La partie décimale des nombres naturels et des nombres entiers est nulle.
Nombres entiers ($\mathbb{Z}$)	Nombres naturels et leurs opposés : $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.	
Nombres rationnels ($\mathbb{Q}$)	Nombres qui peuvent s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers : $\frac{a}{b}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$.	Les nombres rationnels possèdent une suite de décimales infinie et périodique, qu'on appelle « période ». ***Exemples :*** **1)** $\frac{-1}{11} = -0{,}090\,909... = -0{,}\overline{09}$ **2)** $\frac{31}{24} = 1{,}291\,666... = 1{,}291\,\overline{6}$ **3)** $\frac{3}{4} = 0{,}75 = 0{,}75\overline{0}$
Nombres irrationnels ($\mathbb{Q}'$)	Nombres qui ne peuvent pas s'exprimer comme le quotient de deux nombres entiers.	Les nombres irrationnels possèdent une suite de décimales infinie et non périodique. On ne peut pas les représenter de façon précise à l'aide de la notation décimale.
Nombres réels ($\mathbb{R}$)	Ensemble qui correspond à l'union des nombres rationnels et des nombres irrationnels.	Les nombres réels s'écrivent en notation décimale seulement s'il s'agit de nombres rationnels.

Ex. :

Ce diagramme de Venn illustre la relation entre les ensembles de nombres.



Voici des symboles couramment utilisés en notation ensembliste.

	Symbole (signification)	Exemple
	∈ (est élément de)	$3 \in \mathbb{N}$ Le nombre 3 est élément de (ou *appartient à*) l'ensemble $\mathbb{N}$.
	∉ (n'est pas élément de)	$\frac{3}{4} \notin \mathbb{Z}$ Le nombre $\frac{3}{4}$ n'est pas élément de (ou *n'appartient pas à*) l'ensemble $\mathbb{Z}$.
	+ (positif)	$\mathbb{Z}_+$ Tous les éléments de $\mathbb{Z}$ qui sont positifs. $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$
	(négatif)	$\mathbb{R}_-$ Tous les éléments de $\mathbb{R}$ qui sont négatifs.
	* (non nul)	$\mathbb{N}^*$ (le symbole se lit « étoilé ») Tous les nombres naturels sauf 0. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$
Opérations sur les ensembles	′ (est complément de)	$\mathbb{Q}'$ (le symbole se lit « prime ») Tous les éléments qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}'$ est complément de $\mathbb{Q}$, car il représente tous les nombres qui ne sont pas rationnels.
Opérations sur les ensembles	∪ (union)	$\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ Union des éléments des ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}'$ pour n'en former qu'un seul, soit $\mathbb{R}$.
Opérations sur les ensembles	∩ (intersection)	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}'$ L'intersection de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{Q}'$ correspond à l'ensemble des éléments communs aux deux ensembles. Or, aucun élément n'appartient à la fois à $\mathbb{Q}$ et à $\mathbb{Q}'$. Le résultat de l'opération est donc l'ensemble vide : { }.

Ex. :

Remarque : On dit que deux ensembles sont égaux lorsqu'ils sont composés de tous les mêmes éléments. On utilise le symbole d'égalité (=) pour les associer.

Le cube et la racine cubique

Le symbole $\sqrt[3]{}$ signifie racine cubique. Extraire la racine cubique correspond à chercher un nombre qui, multiplié par lui-même trois fois, donne le nombre sous le symbole du radical.

radical

Indice

$$\sqrt[3]{a} = x$$

radicande

racine cubique

Si $\sqrt[3]{a} = x$, alors $x^3 = a$.

Ex. :

$\sqrt[3]{8} = 2$ alors $2^3 = 8$

Exposants fractionnaires

Les racines de nombres (racines carrées, cubiques ou autres) peuvent être représentées par des exposants fractionnaires de forme $\frac{1}{n}$,n étant l'indice du radical.

$$\boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}} \quad \boxed{a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}} \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

Ex. :

- $\sqrt{36} = 36^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[3]{69} = 69^{\frac{1}{3}}$

ex de racine autre...

$$\sqrt[7]{121} = 121^{\frac{1}{7}}$$

Autres lois des exposants

Puissance d'une puissance

La puissance d'une puissance est la base affectée du produits des exposants

$$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$$

Rappel:
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
ex. $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$

Ex.$_1$:

$$\left(8^2\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{2 \cdot \frac{1}{3}}$$
$$= 8^{\frac{2}{3}}$$

8 $\boxed{x^y}$ $(2/3)$ $\boxed{=}$ $\sqrt[x]{y}$

$\frac{a}{b}$ $a\frac{b}{c}$

$$64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64}$$
$$= 4$$

Ex$_2$.

$$25^{\frac{3}{2}} = \left(25^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

ouf!
Pas très efficace!! :(

$$= \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^3$$
$$= \left(\sqrt{25}\right)^3$$
$$= (5)^3$$
$$= 125$$

Il faut être stratégique

Ex 3.

$$(16)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{16^{\frac{3}{2}}}$$

$$(16^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^3}$$

$$\left(16^{\frac{1}{2}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{\left(\sqrt{16}\right)^3}$$

$$= \frac{1}{4^3}$$

$$= \frac{1}{64}$$

$\boxed{\sqrt[y]{x}}$

$\sqrt[5]{216}$

SHIFT

2nd 2 $\boxed{x^y}$ 4

$\sqrt[x]{y}$

5 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 216 $\boxed{=}$

$\boxed{a^b}$

$\boxed{\wedge}$

$\boxed{\sqrt[x]{\ }}$

$\boxed{x^{\frac{1}{y}}}$

$2,3 \times 10^8$

Puissance d'un produit

La puissance d'un produit est égale au produit des puissances.

$$\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$$

Ex. : $(5 \cdot 7)^3 = 5^3 \cdot 7^3$

$42875 = 125 \cdot 343$

Ex2. $2^{\frac{1}{2}} \cdot 32^{\frac{1}{2}} = (2 \cdot 32)^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} = 64^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8$

Puissance d'un quotient

La puissance d'un quotient est égale au quotient des puissances.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ex. :

$$\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{4}} = \frac{25^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{5}{2}$$

Ex₂.

$$\left(\frac{16}{9}\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{16^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= \frac{1}{\frac{(16^{\frac{1}{2}})^3}{(9^{\frac{1}{2}})^3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{4^3}{3^3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{64}{27}}$$

$$= \frac{27}{64}$$